

UNIVERSITE PARIS DIDEROT (PARIS 7)  
Ecole Doctorale : Paris Centre

**DOCTORAT**  
de Mathématiques

**Emmanuel LEPAGE**  
Géométrie anabélienne tempérée

**Thèse dirigée par Yves ANDRÉ**

Soutenue le 04/12/2009

JURY :

M. Yves ANDRÉ	Directeur de thèse
M. Francesco BALDASSARRI	
M. Jean-Benoît BOST	
M. Antoine CHAMBERT-LOIR	Rapporteur (absent)
M. Antoine DUCROS	
M. Shinichi MOCHIZUKI	Rapporteur (absent)
Mme Leila SCHNEPS	
M. Jakob STIX	

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Préliminaires</b>	<b>14</b>
1.1	Espaces de Berkovich . . . . .	14
1.1.1	Spectre d'un anneau de Banach . . . . .	14
1.1.2	Espaces affinoïdes . . . . .	14
1.1.3	Espaces analytiques . . . . .	16
1.1.4	Espace analytique associé à une variété algébrique . . . . .	17
1.1.5	Espace analytique associé à un schéma formel . . . . .	18
1.1.6	Morphismes étales et morphismes lisses . . . . .	18
1.2	Groupe fondamental tempéré . . . . .	19
1.2.1	Définition . . . . .	19
1.2.2	Résultats de Mochizuki sur le groupe fondamental $(p')$ -tempéré d'une courbe . . . . .	23
1.3	Groupes fondamentaux logarithmiques . . . . .	25
1.3.1	Log schémas . . . . .	25
1.3.2	Revêtements két . . . . .	28
1.3.3	Morphismes saturés . . . . .	29
1.4	Squelette d'un espace de Berkovich à réduction pluristable . . . . .	30
<b>2</b>	<b>Quelques propriétés du groupe fondamental tempéré</b>	<b>37</b>
2.1	Localité des revêtements tempérés des courbes . . . . .	37
2.2	Invariance birationnelle . . . . .	41
2.3	Altérations et groupe fondamental tempéré . . . . .	42
2.3.1	Invariance de $\pi_1^{\text{temp}}$ par extension algébriquement close de corps de base . . . . .	43
2.3.2	Produits et groupe fondamental tempéré . . . . .	44
2.4	Groupe fondamental tempéré abélianisé . . . . .	45
2.4.1	Groupe fondamental tempéré d'une variété abélienne . . . . .	45
2.4.2	Abélianisation du groupe fondamental $(p')$ -tempéré d'une courbe . . . . .	47
2.4.3	Jacobienne et $\pi_1^{\text{temp}(p'),\text{ab}}$ d'une courbe . . . . .	49
2.4.4	Jacobienne et $\pi_1^{\text{temp}^{\text{ab}}}$ d'une courbe . . . . .	50
<b>3</b>	<b>Métrie de la réduction stable d'une courbe de Mumford</b>	<b>52</b>
3.1	Préliminaires . . . . .	54
3.2	Cas de $\mathbf{P}^1 \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$ . . . . .	57
3.3	Cas d'une courbe elliptique épointée . . . . .	58
3.4	Cas d'une courbe de Mumford . . . . .	61

3.4.1	Rappels sur les courbes de Mumford et les courants . . .	61
3.4.2	Résultats préliminaires sur la décompositions des toseurs correspondant aux courants . . . . .	64
3.4.3	Graphe métrique de la réduction stable et groupe fonda- mental tempéré . . . . .	65
3.4.4	Un résultat combinatoire . . . . .	70
<b>4</b>	<b>Complexes classifiants de groupes</b>	<b>78</b>
4.1	Groupes quasiprodiscrets . . . . .	78
4.2	Complexes classifiants de groupes et groupes fondamentaux . . .	82
4.2.1	Complexes classifiants . . . . .	82
4.2.2	Groupe fondamental . . . . .	85
4.3	Sous-catégories d'une catégorie classifiante et applications . . . .	86
4.4	Complexes $l$ -polysimpliciaux classifiants et groupe fondamental tempéré . . . . .	89
4.5	Changement de catégorie de base . . . . .	91
4.5.1	Cas d'invariance par changement de base . . . . .	91
4.5.2	Descente de complexes classifiants . . . . .	94
<b>5</b>	<b>Groupe fondamental tempéré d'un log schéma pluristable</b>	<b>99</b>
5.1	Groupe fondamental tempéré d'un log-schéma pluristable . . . .	100
5.1.1	Log schémas polystables . . . . .	100
5.1.2	Ensemble polysimplicial d'un log schéma két au-dessus d'une log fibration polystable . . . . .	102
5.1.3	Groupe fondamental tempéré d'une log fibration polystable	108
5.2	Comparaison pour le groupe fondamental tempéré pro- $(p')$ . . . .	113
5.2.1	Squelette d'un log schéma két au-dessus d'un log schéma pluristable . . . . .	114
5.2.2	Théorème de comparaison des groupes fondamentaux tem- pérés . . . . .	117
5.2.3	Théorème de comparaison des groupes fondamentaux tem- pérés géométriques . . . . .	118
5.3	Complexes classifiants associés et groupe fondamental algébrique de la fibre spéciale . . . . .	119
5.3.1	Complexe classifiant des strates . . . . .	119
5.3.2	Complexe classifiant polysimplicial d'un schéma stricte- ment polystable . . . . .	120
5.3.3	Complexe classifiant $l$ -polysimplicial d'une fibration stricte- ment polystable . . . . .	120
5.3.4	Descente et complexe classifiant $l$ -polysimplicial d'une fi- bration polystable . . . . .	121
5.3.5	Comparaison des groupes fondamentaux tempérés . . . .	122
<b>6</b>	<b>Cospécialisation et groupe fondamental tempéré</b>	<b>124</b>
6.1	Spécialisation des groupes fondamentaux log géométriques . . . .	126
6.2	Cas des courbes . . . . .	132
6.2.1	Définitions . . . . .	132
6.2.2	Cospécialisation topologique des courbes semistables . . .	134
6.2.3	Cospécialisation topologique et revêtements két . . . . .	137
6.2.4	Cospécialisation du groupe fondamental tempéré . . . . .	137

6.3	Cospécialisation du groupe fondamental $(p')$ -tempéré . . . . .	139
6.3.1	Cospécialisation d'ensembles polysimpliciaux . . . . .	139
6.3.2	Morphisme de cospécialisation du groupe fondamental $(p')$ - tempéré . . . . .	145

## Remerciements

Je tiens à remercier tous ceux qui m'ont aidé dans la réalisation de cette thèse : Yves ANDRÉ pour m'avoir guidé dans ce travail de recherche et pour les multiples relectures qu'il a fait de mes différents travaux ; Antoine CHAMBERT-LOIR et Shinichi MOCHIZUKI pour avoir accepté la tâche ingrate de rapporteur et pour leurs commentaires et remarques ; Francesco BALDASSARRI, Jean-Benoît BOST, Antoine DUCROS, Leila SCHNEPS et Jakob STIX qui ont accepté de faire partie du jury ; Luc ILLUSIE pour son intérêt pour mes questions sur le groupe fondamental logarithmique ; Fumiharu KATO pour m'avoir invité pendant deux mois à l'Université de Kyoto (et la JSPS pour avoir financé le séjour) et Akio TAMAGAWA pour les discussions que j'ai eues avec lui lors de ce séjour.

# Introduction

## Problématique

### Groupes fondamentaux en géométrie analytique $p$ -adique : groupe fondamental tempéré

Pour un espace topologique connexe localement contractile, le groupe fondamental de Poincaré classe les revêtements de cet espace.

A. Grothendieck a développé une théorie similaire en géométrie algébrique : il associe à un schéma connexe un groupe profini qui classe les revêtements étales finis ([17, V.7]).

Dans le cas d'une variété algébrique complexe, le groupe fondamental algébrique de Grothendieck s'identifie au complété profini du groupe fondamental topologique de Poincaré de la variété analytique associée ([17, cor. XII.5.2]).

On voudrait une théorie analogue en  $p$ -adique. Plus précisément, on voudrait associer à une variété analytique  $p$ -adique un "groupe fondamental" dont le complété profini soit le groupe fondamental algébrique si la variété est algébrique, mais qui mette aussi en évidence les différentes *uniformisations* dans la géométrie analytique rigide. Supposons momentanément pour simplifier que le corps de base est  $\mathbf{C}_p$ . J. Tate a montré que, en termes de sa géométrie rigide, une courbe elliptique  $E$  ayant mauvaise réduction (une telle courbe est appelée une courbe de Tate) peut être décrite sous la forme  $\mathbf{G}_m/q^{\mathbf{Z}}$  avec  $|q| < 1$ . Nous voudrions que le groupe fondamental fasse apparaître  $\mathbf{G}_m$  comme un revêtement de  $E$ . Cette uniformisation peut se généraliser aux courbes de Mumford. Par définition, une courbe de Mumford est une courbe dont toutes les composantes irréductibles de la réduction stable sont rationnelles. Ceci équivaut à dire que sa jacobienne a réduction multiplicative. Si  $X$  est une courbe de Mumford, alors il existe un sous-groupe  $\Gamma$  discret de type fini de  $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{C}_p)$  dont tous les éléments sont hyperboliques et tel que  $X = \Omega/\Gamma$ , où  $\Omega$  est le complémentaire dans  $\mathbf{P}^1$  des points d'accumulation d'orbites par l'action de  $\Gamma$ . On voudrait que  $\Omega$  soit un revêtement de  $X$ .

Le cadre topologico-géométrique que nous utiliserons est celui de V. Berkovich ([4]). Une définition naïve de la géométrie analytique conduit à des espaces totalement discontinus. L'approche de Berkovich consiste à rajouter des points, correspondant localement aux semi-normes sur des algèbres de séries convergentes. Ainsi, pour une variété sur un corps complet non archimédien  $K$ , Berkovich ne considère plus seulement, comme Tate, des points à valeurs dans une

extension finie de  $K$ , mais dans une extension isométrique complète quelconque de  $K$ . Dans le cas de la droite, on ajoute ainsi entre autres des points correspondant à toutes les boules de la droite (la seminorme correspondante est la norme infinie sur cette boule dans une extension assez grosse de  $K$ ). Ce faisant, les espaces de Berkovich sont localement connexes.

La géométrie analytique non archimédienne développée par Berkovich dans [4] permet d’avoir une bonne notion de revêtement topologique ; en effet, l’espace de Berkovich associé à une variété algébrique lisse est localement contractile ([7]). De plus, si  $X$  est une courbe de Mumford, l’uniformisation  $\Omega \rightarrow X$  est un revêtement topologique. En particulier l’uniformisation  $\mathbf{G}_m \rightarrow \mathbf{G}_m/q^{\mathbf{Z}}$  d’une courbe de Tate est un revêtement topologique infini. Cependant, contrairement à la situation complexe, les revêtements étales finis n’induisent pas nécessairement des revêtements topologiques. Par exemple, le revêtement kummérien  $\mathbf{G}_m \rightarrow \mathbf{G}_m$  qui envoie  $x$  sur  $x^n$  est un revêtement étale fini d’ordre  $n$  mais n’est pas un revêtement topologique car la préimage d’un point de Berkovich correspondant à une boule de centre 0 a un unique élément.

Pour combler cette lacune, on est donc obligé de considérer une plus grosse catégorie de revêtements.

Dans cette optique, A.J. de Jong a développé dans [11] une notion de revêtement étale (non nécessairement fini) d’un espace de Berkovich lisse. Ces revêtements étales sont classifiés par un groupe topologique, dont le complété profini est le groupe fondamental algébrique dans le cas d’une variété algébrique lisse.

Cependant, ce groupe fondamental étale est en général “trop gros” pour pouvoir être décrit raisonnablement. Ainsi, le groupe fondamental étale de la droite projective n’est même pas prodiscret (en tant que groupe topologique), alors que, dans le cas complexe, le groupe fondamental topologique est trivial.

On pourrait aussi considérer la catégorie des faisceaux localement constants sur le site étale de Berkovich. Cette catégorie est une sous-catégorie pleine de la catégorie des revêtements étales. Le groupe fondamental associé est le complété prodiscret du groupe fondamental étale. Mais il est encore trop difficile à décrire.

Pour obtenir un groupe plus maniable, Y. André a défini une notion de *revêtement tempéré*. Un revêtement tempéré est un revêtement étale (au sens de de Jong) qui devient un revêtement topologique après pullback par un revêtement étale fini. Ces revêtements tempérés sont classifiés par un groupe topologique, le *groupe fondamental tempéré* dont le complété profini est encore le groupe fondamental algébrique. Mais tout revêtement tempéré est dominé par le revêtement topologique universel d’un revêtement étale fini galoisien (ce qui assure que le groupe fondamental tempéré est un groupe prodiscret). On est donc assez proche de la situation complexe. Dans le cas d’une courbe, le groupe fondamental tempéré est résiduellement fini, ce qui permet de borner sa taille par celle du groupe fondamental algébrique.

## Applications du groupe fondamental tempéré

Les groupes fondamentaux  $p$ -adiques, tempérés ou étales au sens de de Jong, ont aussi pour but de donner un analogue  $p$ -adique (au moins partiel) de la correspondance de Riemann-Hilbert complexe entre représentations du groupe fondamental et fibrés vectoriels munis d’une connexion intégrable. Pour l’ana-

logue  $p$ -adique, il faut cependant rajouter une hypothèse sur la constance locale du faisceau des sections horizontales de la connexion (voir [11, th. 4.2] et [2, th. III.3.4.6, § III.3.5] pour des énoncés précis).

Les groupes fondamentaux tempérés apparaissent aussi dans la recherche d'un analogue  $p$ -adique à la théorie des groupes triangulaires de Schwarz de la géométrie complexe. Les groupes triangulaires  $p$ -adiques sont définis dans [2, def. III.5.2.] comme les images (quand elles sont discrètes) de l'action de monodromie du groupe fondamental étale sur  $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{C}_p)$  défini par certaines équations différentielles hypergéométriques quand le faisceau de leurs solutions est localement constant pour la topologie étale. Contrairement au cas complexe, le faisceau des solutions n'est a priori pas nécessairement localement constant et le groupe de monodromie n'est a priori pas nécessairement discret. La question se pose donc de savoir quand les groupes triangulaires existent.

On peut, de façon similaire au groupe fondamental tempéré, définir des groupes fondamentaux tempérés d'orbifolds ([2, § III.4.4]). Les groupes fondamentaux tempérés de l'orbifold  $\mathbf{P}_1$  avec ramification en trois points donnent une interprétation des groupes triangulaires  $p$ -adiques ([2, prop. III.5.2.4]). Les groupes triangulaires de type Mumford correspondent à de tels orbifolds qui admettent une uniformisation par une courbe de Mumford. Dans [24], F. Kato classe ces groupes triangulaires de type Mumford. André montre qu'essentiellement tous les groupes triangulaires proviennent d'orbifolds de type Mumford ([2, th. III.5.3.7]).

P.E. Bradley se sert de ces groupes triangulaires pour démontrer que tout groupe fini apparaît comme groupe de Galois d'un revêtement ramifié de  $\mathbf{P}^1$  par une courbe de Mumford de genre  $\geq 2$  ([10, th. 6]).

Le groupe fondamental tempéré (tout comme le groupe fondamental algébrique) est défini pour des corps de base non nécessairement algébriquement clos. On a alors une suite fondamentale de type usuel reliant groupes fondamentaux tempérés "arithmétique" et "géométrique". Ainsi, si  $X$  est une variété sur  $\mathbf{Q}_p$ , le groupe fondamental tempéré de  $X_{\mathbf{C}_p}$  est muni d'une action extérieure du groupe de Galois  $\mathrm{Gal}(\mathbf{C}_p/\mathbf{Q}_p)$ . Ces actions galoisiennes donnent au groupe fondamental tempéré un intérêt arithmétique.

Ainsi, le groupe fondamental tempéré permet de construire un analogue  $p$ -adique de la théorie de Grothendieck-Teichmüller. On a un morphisme du groupe de Galois  $G_{\mathbf{Q}}$  de  $\mathbf{Q}$  dans le groupe  $\mathrm{Out} \pi_1^{\mathrm{alg}}(\mathbf{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\})$  des automorphismes extérieurs du groupe fondamental profini géométrique de  $\mathbf{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$  induit par l'action de  $G_{\mathbf{Q}}$  sur  $\mathbf{P}_{\mathbf{Q}}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ . Ce morphisme est injectif ([3]). On peut alors caractériser l'image du groupe de Galois  $G_{\mathbf{Q}_p}$  de  $\mathbf{Q}_p$  en termes du groupe fondamental tempéré de  $\mathbf{P}_{\mathbf{C}_p}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$  ([1, th. 7.2.1]). Plus précisément,  $G_{\mathbf{Q}_p}$  est l'intersection de  $G_{\mathbf{Q}}$  et de  $\mathrm{Out} \pi_1^{\mathrm{alg}}(\mathbf{P}_{\mathbf{C}_p}^1 \setminus \{0, 1, \infty\})$ . Ceci permet, en considérant des groupes d'automorphismes des groupes fondamentaux tempérés des espaces de modules de courbes de type  $(0, n)$ , de définir une variante  $p$ -adique du groupe de Grothendieck-Teichmüller ([1, §8]).

La géométrie anabélienne s'intéresse à ce que l'on peut retrouver de variétés à partir de groupes fondamentaux. Cette étude a été lancée par Grothendieck, qui a conjecturé que l'on pouvait reconstruire une courbe hyperbolique sur un corps



de nombres  $K$  à partir de son groupe fondamental profini géométrique muni de l'action extérieure du groupe de Galois  $G_K$ . S. Mochizuki a résolu ce problème et même le problème analogue sur une extension finie  $K$  de  $\mathbf{Q}_p$  ([31, th. A]). Dans cette optique anabélienne, on peut se demander ce qu'on peut reconstruire d'une courbe hyperbolique sur  $\mathbf{C}_p$  à partir de son groupe fondamental tempéré, malgré l'absence de l'action galoisienne. Mochizuki s'est intéressé à cette question et a prouvé qu'on pouvait reconstruire le graphe de sa réduction stable à partir de son groupe fondamental tempéré ([33]). Les sommets du graphe correspondent aux sous-groupes compacts maximaux d'un quotient caractéristique du groupe fondamental tempéré (une variante  $(p')$  du groupe), et les arêtes aux intersections non triviales de tels sous-groupes compacts maximaux.

## Contenu de la thèse

### Vers une description du groupe fondamental tempéré

Le groupe fondamental tempéré est en général très difficile à calculer explicitement. De par sa définition même, le groupe fondamental tempéré dépend non seulement de la structure topologique de la variété (et donc de la structure combinatoire d'une réduction), mais aussi de celle de tous ses revêtements étales finis. Sauf dans de très rares cas (comme les variétés abéliennes ; cf. § 2.4.1), on ne sait pas en donner une description explicite. Il n'est en général même pas localement compact (par exemple pour  $\mathbf{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$  ; cf. [2, prop. III.2.3.12]).

### Propriétés générales analogues à celles des groupes fondamentaux usuels

Cependant, je démontre pour le groupe fondamental tempéré un certain nombre de propriétés générales analogues à celles bien connues pour le groupe fondamental topologique ou pour le groupe fondamental algébrique. Je démontre par exemple que le groupe fondamental tempéré (sur le corps de base  $\mathbf{C}_p$ ) est :

- *invariant par un morphisme birationnel de variétés algébriques propres et lisses* (proposition 2.2.1) ;
- *compatible aux produits* (“formule de Künneth” ; proposition 2.3.4) ;
- *invariant par extension isométrique algébriquement close du corps de base* (proposition 2.3.2).

La preuve de chacun de ces résultats repose sur l'étude du comportement topologique (pour la topologie de Berkovich) des revêtements étales finis. L'invariance birationnelle utilise simplement le fait que le groupe fondamental topologique d'une variété lisse est le même pour tous les ouverts de Zariski denses. Les deux autres résultats reposent sur la description du type d'homotopie d'un espace de Berkovich muni d'une réduction semistable en termes de la combinatoire de cette réduction. On se ramène au cas d'espaces ayant réduction semistable en utilisant les théorèmes d'altération de J. de Jong.

Je démontre également un *théorème de type Van Kampen* (les revêtements sont locaux pour la topologie étale), mais uniquement *pour les courbes* (corollaire 2.1.2). Il serait intéressant de savoir si ce résultat est encore vrai en dimension supérieure.

J'établis aussi un *isomorphisme entre l'abélianisé du groupe fondamental d'une*

*courbe et le groupe fondamental tempéré de sa jacobienne* (théorème 2.4.2). Dans le cas d'une *variété abélienne*, je donne une *description explicite du groupe fondamental tempéré* (§ 2.4.1).

### Variantes $(p')$

La difficulté de décrire le comportement combinatoire de la réduction des revêtements étales finis diminue sensiblement si l'on se restreint aux revêtements  $\text{pro-}(p')$  (c'est-à-dire d'ordre premier à la caractéristique résiduelle  $p$ ). Pour cette raison, S. Mochizuki a introduit, dans le cas des courbes, une variante  $(p')$  du groupe fondamental tempéré qui classifie les revêtements qui deviennent topologique après changement de base par un revêtement étale fini  $\text{pro-}(p')$  (cette définition se généralise sans difficulté au cas général). Mochizuki décrit alors cette variante  $(p')$  en termes de la combinatoire de la réduction stable de la courbe. Cette description se fait à travers un graphe de groupes. Nous étudierons plus généralement ce groupe fondamental tempéré  $\text{pro-}(p')$  en dimension supérieure.

**Pont entre groupe fondamental tempéré  $\text{pro-}(p')$  et géométrie logarithmique.** Un outil qui nous sera indispensable pour décrire le groupe fondamental  $(p')$ -tempéré d'un espace de Berkovich sera la log géométrie, et plus spécifiquement le groupe fondamental logarithmique.

L'intérêt du groupe fondamental logarithmique dans notre contexte est qu'il permet de décrire le groupe fondamental  $\text{pro-}(p')$  de la fibre générique en termes de la fibre spéciale dans un cadre plus général que celui offert par le théorème de spécialisation de Grothendieck. Ainsi, pour une variété algébrique lisse et propre à réduction semistable, le groupe fondamental  $\text{pro-}(p')$  de la variété est isomorphe au groupe fondamental logarithmique  $\text{pro-}(p')$  de la réduction semistable (munie d'une structure logarithmique). La réduction semistable présente une structure combinatoire intéressante et Berkovich a fait le lien entre la structure combinatoire d'une telle réduction semistable et la structure topologique de l'espace de Berkovich associé à la variété ([7]). Nous prolongerons cette étude en faisant le lien entre la structure combinatoire d'un revêtement logarithmique de la réduction et la structure topologique de l'espace de Berkovich du revêtement correspondant de la variété (proposition 5.2.1).

Ceci nous conduira à *définir un groupe fondamental tempéré d'une variété algébrique semistable munie d'une structure logarithmique compatible*. Nous le comparerons avec le groupe fondamental tempéré de notre espace de Berkovich :

*Soit  $\underline{X} : X \rightarrow \cdots \rightarrow \text{Spec}(O_K)$  une log fibration polystable sur  $\text{Spec}(O_K)$ . Soit  $\bar{x}$  un point géométrique de  $X_\eta^{\text{an}}$ , et soit  $\tilde{x}$  sa log réduction. On a un morphisme  $\pi_1^{\text{temp}}(X_\eta^{\text{an}}, \bar{x})^{\mathbb{L}} \rightarrow \pi_1^{\text{temp}}(X_s, \tilde{x})^{\mathbb{L}}$  qui est un isomorphisme si  $p \notin \mathbb{L}$  (théorème 5.2.2).*

**Complexes de groupes.** Pour donner une description combinatoire du groupe fondamental  $(p')$ -tempéré généralisant celle de Mochizuki pour les courbes, nous serons amené à introduire une notion purement catégorique de *complexes classifiants* (§ 4.2.1) et de groupes fondamentaux de tels complexes classifiants. Cette notion vise principalement à généraliser la notion de complexes de groupes dé-

finis par A. Hæfliger dans [20]. L'idée des complexes de groupes consiste en la donnée suivante :

- un espace de base sous forme d'une donnée combinatoire,
- pour chaque composante de l'espace de base, un groupe (qui, intuitivement, classe les revêtements de cette composante).

L'intérêt est alors de construire à partir de ces données un groupe qui, intuitivement, classe les revêtements de l'espace.

Dans la théorie d'Hæfliger, l'espace de base est un ensemble simplicial, et les groupes des composantes sont discrets.

Nous élargirons le cadre :

- l'espace de base ne sera plus un ensemble simplicial mais une catégorie. Ceci nous permettra en particulier de passer sans difficulté à un espace de base polysimplicial, qui constitue le cadre de la théorie introduite par Berkovich dans [7].
- Les groupes en les différentes composantes de l'espace ne seront plus supposés discrets (voir [38] pour une théorie des complexes de groupes profinis). Ce seront des groupes topologiques quelconques.

La différence principale entre l'étude ici faite et la théorie de Hæfliger consiste en la définition des groupes fondamentaux. Nous définirons ici le groupe fondamental d'un complexe de groupes en terme d'une catégorie de revêtements, comme Mochizuki dans [33]. A défaut de donner une description explicite du groupe fondamental, une telle définition met plus en évidence le lien avec la situation géométrique qui nous intéresse où tous les groupes fondamentaux sont définis en termes de revêtements. Ceci nous permettra en particulier, en considérant des sous-catégories de revêtements, de définir plusieurs types de groupes fondamentaux, notamment un groupe fondamental tempéré (et une variante  $p'$ ).

Nous associerons alors à un log schéma semistable sur un log point un complexe classifiant, dont les groupes des composantes sont des groupes fondamentaux logarithmiques. On construira alors un *isomorphisme entre le groupe fondamental  $(p')$ -tempéré du log schéma semistable et le groupe fondamental  $(p')$ -tempéré de son complexe classifiant* (§ 5.3.5).

## Propriétés anabéliennes du groupe fondamental tempéré

La complication du groupe fondamental tempéré traduit aussi la richesse d'information qu'il contient. Le groupe fondamental tempéré géométrique d'une variété dépend ainsi beaucoup plus de la variété elle-même que ne le font le groupe fondamental topologique complexe ou même le groupe fondamental algébrique. Par exemple, le groupe fondamental tempéré géométrique d'une droite projective privée de quatre points dépend de la position des quatre points. Plus généralement, Mochizuki a prouvé que, pour une courbe hyperbolique, on pouvait reconstruire le graphe de groupe pro- $(p')$  de sa réduction stable à partir de son groupe fondamental tempéré (et même de son groupe fondamental  $(p')$ -tempéré : les sommets du graphe correspondent aux classes de conjugaison de sous-groupes compacts maximaux du groupe fondamental  $(p')$ -tempéré et les arêtes aux classes de conjugaison d'intersections non triviales de deux sous-groupes compacts maximaux distincts ; [33])).

On peut alors se demander à quel point ce groupe fondamental tempéré dépend de la courbe elle-même.

On prouvera , à ce propos, le résultat suivant :

*L'isomorphisme entre les graphes de la réduction stable de deux courbes de Mumford induit par un isomorphisme des groupes fondamentaux tempérés de ces deux courbes conserve les métriques naturelles sur ces graphes (théorème 3.4.6).*

La preuve de ce résultat repose principalement sur l'étude du comportement des revêtements abéliens, et de leurs descriptions en termes de fonctions thêta et de courants sur le graphe de la réduction semi-stable. Contrairement au résultat de Mochizuki, ce théorème repose essentiellement sur les revêtements sauvagement ramifiés. Il devient faux si l'on remplace le groupe fondamental tempéré par sa variante  $(p')$ , puisqu'on peut reconstruire le groupe fondamental  $(p')$ -tempéré à partir du graphe de groupes pro- $(p')$  de sa réduction stable (dans le cas de courbes de Mumford, ce graphe de groupes pro- $(p')$  peut même être reconstruit, à isomorphisme près, à partir du seul graphe de la réduction stable). Il serait intéressant de généraliser ce résultat à une courbe quelconque.

## Variation du groupe fondamental tempéré en famille et cospécialisation

Les propriétés anabéliennes précédentes ont la conséquence suivante : si l'on a un morphisme propre et lisse, on ne peut pas espérer que le groupe fondamental tempéré des fibres soit localement constant.

On peut y remédier partiellement en considérant uniquement le groupe fondamental  $(p')$ -tempéré, mais il n'est pas non plus constant sur les fibres d'un morphisme propre et lisse (en fait, pour une courbe hyperbolique, on peut encore reconstruire le graphe de la réduction stable à partir du groupe fondamental  $(p')$ -tempéré).

Une importante partie de cette thèse est dédiée à comprendre comment varie le groupe fondamental tempéré pour une famille de variétés.

Notre principal résultat dans cette direction sera la construction de *morphismes de cospécialisation* pour le groupe fondamental  $(p')$ -tempéré, dans la situation d'un morphisme propre et lisse ayant réduction semistable (théorèmes 6.2.5 et 6.3.5 ; l'appellation "morphismes de cospécialisation" fait référence aux morphismes de spécialisation de Grothendieck pour les groupes fondamentaux profinis, mais ici les morphismes vont dans l'autre sens).

Le lien établi entre le groupe fondamental tempéré d'une variété et le groupe fondamental tempéré d'une log réduction semistable nous conduira à une reformulation purement log géométrique de la question. Plus précisément, nous serons amenés à construire des morphismes de cospécialisation de groupes fondamentaux topologiques. Nous aurons aussi à étudier l'invariance du groupe fondamental logarithmique géométrique par changement de log point de base.

## Questions en suspens

- L'énoncé 2.1.2 de type Van Kampen sur les revêtements tempérés pour la topologie étale au sens de Berkovich pour les courbes propres est-il encore valable en dimension supérieure ? A défaut d'un tel résultat, on peut s'intéresser à cette question pour des topologies moins fines comme

la topologie usuel de Berkovich, la topologie étale algébrique, la topologie de Zariski...

- L'énoncé de type Van Kampen 2.1.2 permet aussi de se poser la question suivante sur la variation du groupe fondamental tempéré des fibres d'une famille de courbes.

Si  $Y \rightarrow X$  est une famille algébrique propre et lisse de courbes, on peut considérer le champ  $\mathcal{C}$  sur la topologie étale (au sens de Berkovich) de  $X^{\text{an}}$  défini en appelant  $\mathcal{C}_U$  la catégorie des faisceaux localement constants pour la topologie étale de  $Y_U^{\text{an}}$ . Si  $x$  est un point géométrique de  $X^{\text{an}}$  (qui définit donc un point du topos étale de  $X^{\text{an}}$ ), le foncteur naturel de la fibre  $\mathcal{C}_x$  vers la catégorie des revêtements tempérés de  $Y_x$  est-il une équivalence de catégories ?

Notre théorème de Van Kampen permet essentiellement de se ramener à l'étude du groupe fondamental topologique de voisinages d'une fibre d'une famille propre et lisse.

- Les morphismes de cospécialisation du groupe fondamental  $(p')$ -tempéré pour une fibration  $Y \rightarrow X$  à réduction polystable donnent la constance locale du groupe fondamental  $(p')$ -tempéré sur les strates, tant que l'on se restreint aux points de  $X^{\text{an}}$  à valuation discrète. Il est naturel de se demander si l'on peut étendre cette description aux points de valuation non discrète.
- Dans une optique anabélienne, il serait intéressant de généraliser le théorème 3.4.6 qui dit qu'on peut reconstruire la métrique du graphe de la réduction stable d'une courbe de Mumford à partir de son groupe fondamental tempéré. Ainsi le résultat reste-t-il vrai si l'on ne se restreint plus aux courbes de Mumford ? Il serait également intéressant, même dans le cas des courbes de Mumford, de donner une description plus explicite des longueurs des arêtes du graphe de la réduction stable en terme du groupe fondamental tempéré.

Il serait intéressant de déterminer quelles données supplémentaires sur les courbes on peut reconstruire à partir du groupe fondamental tempéré. De façon plus drastique, une courbe hyperbolique est-elle uniquement déterminée, à isomorphisme près, par son groupe fondamental tempéré géométrique ?

- Il serait également intéressant de classifier les sous-groupes compacts maximaux du groupe fondamental tempéré d'une courbe hyperbolique, en étendant les résultats de Mochizuki pour le groupe fondamental  $(p')$ -tempéré. Plus précisément, il serait intéressant de les relier aux groupes de décomposition des points de l'espace de Berkovich de la courbe. Ces groupes de décomposition sont bien des sous-groupes compacts du groupe fondamental tempéré et on peut, par des arguments similaires à ceux de Mochizuki dans le cas pro- $(p')$  montrer que tout sous-groupe compact du groupe fondamental tempéré est, à conjugaison près dans le complété profini, inclus dans un tel sous-groupe de décomposition. La question se pose de savoir quand ces groupes de décompositions sont égaux.

## Plan

Le premier chapitre sera consacré aux préliminaires. Nous commencerons par rappeler la définition du groupe fondamental tempéré et les résultats de bases le concernant. Nous rappellerons également le lien entre le graphe de la réduction stable d'une courbe hyperbolique et le groupe fondamental tempéré. Nous nous orienterons ensuite vers la log géométrie et plus spécifiquement les groupes fondamentaux logarithmiques dont nous aurons besoin dans les deux derniers chapitres.

Finalement, nous revisiterons l'article [7], où Berkovich construit une rétraction de la fibre générique (en tant qu'espace de Berkovich) d'un schéma formel pluristable sur un fermé qui se décrit en termes de la structure combinatoire de la réduction.

Le deuxième chapitre sera consacré à établir, pour le groupe fondamental tempéré, des propriétés analogues à celles connues pour le groupe fondamental algébrique cités plus haut : invariance birationnelle, invariance par extension algébriquement close du corps de base, formule de Künneth et abélianisation du groupe fondamental tempéré des courbes.

Le troisième chapitre sera consacré à prouver que l'isomorphisme entre les graphes des réductions semi-stables de deux courbes de Mumford induit par un isomorphisme de leurs groupes fondamentaux tempérés conserve la métrique de ces graphes. Nous commencerons par l'étude des cas particuliers d'une droite époutée et d'une courbe elliptique époutée.

La quatrième partie, purement catégorique, sera consacrée à l'étude des complexes classifiants et de leurs groupes fondamentaux.

La cinquième partie consistera à définir un groupe fondamental tempéré pour un schéma pluristable muni d'une structure logarithmique compatible. Nous comparerons ensuite pour un schéma pluristable sur l'anneau des entiers  $O_K$  le groupe fondamental tempéré de sa fibre géométrique et celui de sa fibre spéciale. Nous donnerons également une description en termes de complexes classifiants de ce groupe fondamental tempéré d'un log schéma pluristable.

La sixième partie sera consacrée à la définition de morphismes de cospécialisation pour une famille propre et lisse avec réduction pluristable.

# Chapitre 1

## Préliminaires

### 1.1 Espaces de Berkovich

Rappelons ici la définition des espaces de Berkovich, tels qu'ils sont définis dans [5].

#### 1.1.1 Spectre d'un anneau de Banach

Un *anneau de Banach*  $A$  est un anneau (commutatif unitaire) muni d'une norme sous-multiplicative  $\|\cdot\|$  pour laquelle  $A$  est complet.

Soit  $(A, \|\cdot\|)$  un anneau de Banach. Le *spectre*  $\mathcal{M}(A)$  de  $A$  est l'ensemble des seminormes  $|\cdot| : A \rightarrow \mathbf{R}_+$  multiplicatives et bornées (c'est-à-dire pour tout  $f, g \in A$ ,  $|fg| = |f||g|$  et  $|f| \leq \|f\|$ ) muni de la topologie la plus faible rendant continues les applications  $|\cdot| \mapsto |f|$ .  $\mathcal{M}(A)$  est alors un espace topologique séparé compact et non vide ([4, th. 1.2.1]).

Si  $x$  est un point de  $\mathcal{M}(A)$  correspondant à une seminorme  $|\cdot|$ , le noyau  $\mathfrak{p}_x$  de  $|\cdot|$  est un idéal premier fermé de  $A$ .  $|\cdot|$  définit une valuation sur le corps des fractions de  $A/\mathfrak{p}_x$ . Notons  $\mathcal{H}(x)$  le complété de ce corps pour cette valuation :  $\mathcal{H}(x)$  est un corps valué complet, appelé le *corps résiduel* de  $x$ .

Tout morphisme borné  $A \rightarrow B$  d'anneaux de Banach induit une application continue  $\mathcal{M}(B) \rightarrow \mathcal{M}(A)$ .

#### 1.1.2 Espaces affinoïdes

Soit  $K$  un corps complet non archimédien. Soient  $O_K$  son anneau des entiers,  $\mathfrak{m}_K$  l'idéal maximal de  $O_K$  et  $k$  son corps résiduel.

Pour  $r = (r_1, \dots, r_n) \in (\mathbf{R}_+^*)^n$ , notons

$$K\{r^{-1}T\} := \left\{ f = \sum_{\nu} a_{\nu} T^{\nu} \mid a_{\nu} \in K, |a_{\nu}| r^{\nu} \xrightarrow{|\nu| \rightarrow \infty} 0 \right\}$$

où  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbf{N}^n$ ,  $|\nu| = \nu_1 + \dots + \nu_n$ ,  $T^{\nu} = T_1^{\nu_1} \dots T_n^{\nu_n}$ , et  $r^{\nu} = r_1^{\nu_1} \dots r_n^{\nu_n}$ .

C'est une  $K$ -algèbre de Banach pour la norme multiplicative  $\|f\| = \max_{\nu} |a_{\nu}| r^{\nu}$ . Pour  $r = (1, \dots, 1)$ , cette algèbre est l'algèbre de Tate  $K\{T_1, \dots, T_n\}$ .

**Définition 1.1.1** ([4, def. 2.1.1]). Une  $K$ -algèbre de Banach  $A$  est  *$K$ -affinoïde* si il existe un épimorphisme  $K\{r^{-1}T\} \rightarrow A$  pour un certain  $r$  qui est *admissible* (c'est-à-dire la norme de  $A$  est équivalente à la norme quotient). Si l'on peut prendre  $r = (1, \dots, 1)$ ,  $A$  est dite strictement  $K$ -affinoïde.

Une algèbre affinoïde est noëthérienne et tous ses idéaux sont fermés.

**Définition 1.1.2** ([4, def. 2.2.1]). Un fermé  $V$  de  $\mathcal{M}(A)$  est un *domaine affinoïde* si il existe un morphisme borné de  $K$ -algèbres affinoïdes  $A \rightarrow A_V$  satisfaisant la propriété universelle suivante : pour tout morphisme borné d'algèbres  $K$ -affinoïdes  $A \rightarrow B$  tel que l'image de  $\mathcal{B}$  dans  $\mathcal{A}$  soit contenue dans  $V$ , il existe un unique morphisme borné  $A_V \rightarrow B$  rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A_V \\ & \searrow & \downarrow \\ & & B \end{array}$$

L'intersection de deux domaines affinoïdes est encore un domaine affinoïde ( $A_{U \cap V} = A_U \otimes_A A_V$ ).

Si  $V$  est un domaine affinoïde  $\mathcal{M}(A_V) = V$  et donc  $A \rightarrow A_V$  détermine  $V$ .

Par exemple, si  $g, f_1, \dots, f_n \in A$  n'ont pas de zéros en commun dans  $X := \mathcal{M}(A)$  et si  $p = (p_1, \dots, p_n) \in (\mathbf{R}_+^*)^n$ , alors le fermé

$$X(p^{-1} \frac{f}{g}) := \{x \in X \mid |f_i(x)| \leq p_i |g(x)|\}$$

est un domaine affinoïde représenté par

$$A \rightarrow A\{p^{-1} \frac{f}{g}\} := A\{p^{-1}T\} / (gT_i - f_i).$$

Un domaine affinoïde de cette forme est appelé *domaine rationnel*.

**Théorème 1.1.1** (Théorème d'acyclicité de Tate). *Si  $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i \in I}$  est un recouvrement fini de  $X := \mathcal{M}(A)$  par des domaines affinoïdes et si  $M$  est un  $A$ -module, le complexe de Čech*

$$0 \rightarrow M \rightarrow \prod_i M \otimes_A A_{V_i} \rightarrow \prod_{i,j} M \otimes_A A_{V_i \cap V_j} \rightarrow \dots$$

*est exact.*

Un sous-ensemble  $V$  de  $X := \mathcal{M}(A)$  est dit spécial si c'est l'union  $V = \bigcup V_i$  d'un nombre fini de domaines affinoïdes  $V_i$ . On pose alors  $A_V = \text{Ker}(\prod_i A_{V_i} \rightarrow \prod_{i,j} A_{V_i \cap V_j})$ .  $A_V$  ne dépend pas du choix du recouvrement  $(V_i)_{i \in I}$ . Si  $U$  est un ouvert de  $X$ , on note

$$O_X(U) = \varprojlim A_V,$$

où  $V$  décrit l'ensemble des sous-ensembles spéciaux contenus dans  $U$ .  $O_X$  est alors un faisceau d'anneau.  $O_{X,x}$  est un anneau local noëthérien. L'espace localement annelé ainsi obtenu est appelé *espace  $K$ -affinoïde*. La catégorie des espaces



affinoïdes est la catégorie opposée de la catégorie des algèbres  $K$ -affinoïdes. Un morphisme  $\mathcal{M}(B) \rightarrow \mathcal{M}(A)$  est *fini* (resp. une *immersion fermée*) si  $B$  est un  $A$ -module de Banach fini (resp.  $A \rightarrow B$  est un épimorphisme admissible).

Définissons la *norme spectrale*  $\rho$  sur  $A$  par

$$\rho(f) := \lim \sqrt[n]{\|f^n\|} = \max_{x \in \mathcal{M}(A)} |f|_x.$$

$A^\circ := \{f \in A \mid \rho(f) \leq 1\}$  est un sous-anneau de  $A$  et  $A^{\circ\circ} := \{f \in A \mid \rho(f) < 1\}$  en est un idéal. Notons  $\tilde{A} := A^\circ / A^{\circ\circ}$ .

Il existe une application  $\pi : \mathcal{M}(A) \rightarrow \text{Spec}(\tilde{A})$ .

Si  $A$  est strictement affinoïde,  $\pi$  est surjective et tout point générique de  $\text{Spec}(\tilde{A})$  a une unique préimage par  $\pi$  ([4, prop. 2.4.4]).

### 1.1.3 Espaces analytiques

**Définition 1.1.3.** Soit  $X$  un espace topologiques. Une famille  $\tau$  de sous-ensembles de  $X$  est

- un *quasifilet* de  $X$  si pour tout  $x \in X$ , il existe  $V_1, \dots, V_n \in \tau$  tels que  $x \in V_1 \cap \dots \cap V_n$  et  $V_1 \cup \dots \cup V_n$  est un voisinage de  $x$ ,
- un *filet* de  $X$  si c'est un quasifilet de  $X$  et si pour tout  $U, V \in \tau$ ,  $\tau_{U \cap V}$  est un quasifilet de  $U \cap V$ .

**Définition 1.1.4** ([5, def. 1.2.3]). Un *espace  $K$ -analytique* est donné par :

- un espace topologique  $|X|$  localement séparé,
- un filet  $\tau$  sur  $|X|$  de sous-ensembles compacts de  $|X|$ ,
- pour tout  $V \in \tau$ , une algèbre  $K$ -affinoïde  $A_V$  et un homéomorphisme  $V \simeq \mathcal{M}(A_V)$ ,
- pour tous  $U, V \in \tau$  tels que  $U \subset V$ , un morphisme borné  $A_V \rightarrow A_U$  qui identifie  $(U, A_U)$  avec un domaine affinoïde de  $(V, A_V)$ .

Un morphisme fort d'espaces  $K$ -analytiques  $\phi : X \rightarrow X'$  est une application continue  $\phi : |X| \rightarrow |X'|$ , telle que pour tout  $V \in \tau$  il existe  $V' \in \tau'$  avec  $\phi(V) \subset V'$ , et un système compatible de morphismes d'espaces  $K$ -affinoïdes  $\phi_{V/V'} : (V, A_V) \rightarrow (V', A_{V'})$  pour tout  $V \in \tau$ ,  $V' \in \tau'$  tels que  $\phi(V) \subset V'$ . On notera  $K\text{-An}$  la catégorie des espaces  $K$ -analytiques pour laquelle les morphismes sont les morphismes forts.

Un morphisme fort  $\phi : X \rightarrow X'$  est un quasi-isomorphisme si c'est un homéomorphisme et si pour tous  $V \in \tau$ ,  $V' \in \tau'$  tels que  $\phi(V) \subset V'$ ,  $\phi_{V/V'}$  identifie  $V$  à un domaine analytique de  $V'$ .

Le système des quasi-isomorphismes vérifie le calcul des fractions à droite.

La catégorie des espaces  $K$ -analytiques est par définition la catégorie  $K\text{-An}$  des fractions de  $K\text{-An}$  pour le système des quasi-isomorphismes.

Un espace  $K$ -analytique  $X$  admet un unique filet maximal  $\hat{\tau}$  contenant  $\tau$  et des algèbres  $\hat{A}_U$  pour  $U \in \hat{\tau}$  qui définisse un espace analytique et tel que  $(|X|, \tau, (A_U)_U) \rightarrow (|X|, \hat{\tau}, (\hat{A}_U)_U)$  soit un isomorphisme. Les éléments de  $\tau$  sont appelés *domaines affinoïdes* de  $X$ . Un sous-ensemble de  $X$  est un *domaine spécial* s'il en existe un recouvrement fini  $(U_i)_{i \in I}$  par des domaines affinoïdes tels que  $A_{U_i} \otimes A_{U_j} \rightarrow A_{U_i \cap U_j}$  soit admissible. Un sous-ensemble  $Y$  de  $X$  est un domaine analytique si la restriction à  $Y$  du filet des domaines affinoïdes est encore un filet. Si  $Y$  est un domaine analytique de  $X$  la restriction du filet des

domaines affinoïdes de  $X$  définit une structure d'espace  $K$ -analytique sur  $Y$ . On peut construire des espaces  $K$ -analytiques par recollement d'espaces  $K$ -analytiques le long d'ouverts, mais aussi par recollement d'un nombre fini (ou localement fini) d'espaces  $K$ -analytiques le long de domaines analytiques fermés ([5, prop. 1.3.3]).

La  $G$ -topologie  $X_G$  sur  $X$  est une topologie de Grothendieck engendrée par la prétopologie sur la catégorie des domaines analytiques de  $X$ , où les recouvrements d'un domaine analytique  $Y$  sont les familles  $(Y_i)_I$  de domaines analytiques de  $Y$  qui forment un quasifilet sur  $Y$ . Si  $X'$  est un espace  $K$ -analytique, le préfaisceau qui à  $Y$  associe  $\text{Hom}(Y, X')$  est un faisceau pour la  $G$ -topologie  $X_G$  de  $X$  (et donc aussi pour la topologie de  $|X|$ ). Pour  $X' = \mathbf{A}^1$ , on obtient le faisceau structural  $O_{X_G}$  de  $X_G$ . Le *faisceau structural* de  $X$  est le poussé en avant  $O_X := \pi_* O_{X_G}$  de  $O_{X_G}$  le long de  $\pi : X_G \rightarrow |X|$ .

Si  $x$  est un point d'un espace analytique  $X$ , il est inclus dans un domaine affinoïde. Le corps non archimédien  $\mathcal{H}(x)$  ne dépend pas du choix d'un tel affinoïde. On l'appelle encore corps résiduel de  $x$ .

$O_{X,x}$  est un anneau local, son corps résiduel est naturellement valué et  $\mathcal{H}(x)$  est le complété de ce corps résiduel.

Dans [4], Berkovich définissait une notion plus restrictive d'espaces  $K$ -analytiques, qu'il appelle dans [5] bon espace  $K$ -analytique. Ce sont les espaces  $K$ -analytiques dont tout point admet un voisinage affinoïde.

La catégorie des espaces  $K$ -analytiques admet des produits fibrés ([5, prop. 1.4.1]). Si  $L$  est une extension isométrique de  $K$ , il existe aussi un foncteur naturel de changement de base  $- \otimes_K L : K\text{-An} \rightarrow L\text{-An}$  et une application continue fonctorielle  $|X \otimes_K L| \rightarrow |X|$  (si  $X = \mathcal{M}(A)$  est affinoïde,  $X \otimes_K L = \mathcal{M}(A \otimes_K L)$ ).

Soient  $\phi : Y \rightarrow X$  un morphisme d'espaces  $K$ -analytiques et  $x$  un point de  $X$ .  $x$  induit un morphisme naturel  $\mathcal{M}(\mathcal{H}(x)) \rightarrow X \otimes_K \mathcal{H}(x)$  d'espaces  $\mathcal{H}(x)$ -analytiques. L'espace  $\mathcal{H}(x)$ -analytique  $Y_x := (Y \otimes_K \mathcal{H}(x)) \times_{X \otimes_K \mathcal{H}(x)} \mathcal{M}(\mathcal{H}(x))$  est la *fibre* de  $\phi$  en  $x$ . L'application  $Y_x \rightarrow Y$  induit un homéomorphisme  $Y_x \rightarrow \phi^{-1}(x)$ .

#### 1.1.4 Espace analytique associé à une variété algébrique

Soit  $X$  un schéma de type fini sur  $K$ . Soit  $F$  le foncteur de la catégorie opposée à celle des bons espaces  $K$ -analytiques dans la catégorie des ensembles qui à  $Z$  associe l'ensemble  $\text{Hom}(Z, X)$  des morphismes d'espaces localement annelés au-dessus de  $\text{Spec } K$ . Ce foncteur est représentable ([4, th. 3.4.1]). On note  $X^{\text{an}}$  le bon espace analytique correspondant.

Décrivons plus précisément  $X^{\text{an}}$ .

Si  $X = \mathbf{A}^n$ ,  $X^{\text{an}}$  est l'union croissante des boules  $D(0, r) = \mathcal{M}(K\{r^{-1}T_1, \dots, r^{-1}T_n\})$  de multirayon  $(r, \dots, r)$ .

Si  $X \rightarrow Y$  est une immersion ouverte, notons  $\phi$  le morphisme canonique d'espaces localement annelés  $Y^{\text{an}} \rightarrow Y$ . Alors  $X^{\text{an}}$  est juste l'ouvert  $\phi^{-1}(X)$ .

Si  $X \rightarrow Y$  est une immersion fermée définie par un idéal  $\mathcal{J}$  de  $O_Y$ , alors  $\mathcal{J}O_{Y^{\text{an}}}$  définit un sous-espace analytique fermé de  $Y^{\text{an}}$  qui n'est autre que  $X^{\text{an}}$ .

Si  $(X_i)_{i \in I}$  est un recouvrement ouvert de  $X$ ,  $X^{\text{an}}$  est obtenu par recollement des  $X_i^{\text{an}}$  le long des  $(X_i \cap X_j)^{\text{an}}$ .

### 1.1.5 Espace analytique associé à un schéma formel

Un schéma formel sur  $\text{Spf } O_K$  est localement topologiquement de présentation finie si il est recouvert par des schémas formels de la forme  $\text{Spf } O_K\{T_1, \dots, T_n\}/I$  où  $O_K\{T_1, \dots, T_n\}$  est l'anneau des séries entières  $\sum a_\nu T^\nu$  avec  $a_\nu \in O_K$  et  $a_\nu \rightarrow 0$  quand  $|\nu| \rightarrow \infty$  et  $I$  est un idéal de type fini de  $O_K\{T_1, \dots, T_n\}$ . A un schéma formel localement topologiquement de présentation finie  $\mathfrak{X}$  sur  $\text{Spf } O_K$ , on associe un espace  $K$ -analytique  $\mathfrak{X}_\eta$ , appelé sa fibre générique. Il existe alors une application fonctorielle  $\pi : \mathfrak{X}_\eta \rightarrow \mathfrak{X}_s$ , appelée *application de réduction* (cette application n'est pas continue). Rappelons-en brièvement la construction ([6, sect. 1]).

Si  $\mathfrak{X} = \text{Spf}(A)$ ,  $A = A \otimes_{O_K} K$  est une algèbre affinoïde et  $\mathfrak{X}_\eta := \mathcal{M}(A)$ . On a un morphisme  $A \rightarrow \mathcal{A}^\circ$  qui induit un morphisme  $A \otimes k \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}$ . L'application de réduction est alors donnée par la composée  $\mathfrak{X}_\eta = \mathcal{M}(A) \rightarrow \text{Spec}(\tilde{\mathcal{A}}) \rightarrow \text{Spec}(A \times O_K) = \mathfrak{X}_s$ .

Si  $\mathfrak{Y}$  est un ouvert de  $\mathfrak{X}$ ,  $\mathfrak{Y}_\eta := \pi^{-1}(\mathfrak{Y})$  est un domaine analytique fermé de  $\mathfrak{X}_\eta$ . Si  $(\mathfrak{X}_i)$  est un recouvrement localement fini de  $\mathfrak{X}$ ,  $\mathfrak{X}_\eta$  est obtenu par recollement des  $\mathfrak{X}_{i,\eta}$  le long des  $(\mathfrak{X}_i \cap \mathfrak{X}_j)_\eta$  (il est à remarquer que le recollement se fait le long de domaine analytique fermé et non d'ouvert comme dans le cas de l'espace analytique associé à une variété algébrique, et donc  $\mathfrak{X}_\eta$  n'a pas de raison a priori d'être un bon espace analytique).

Si  $X$  est un schéma localement de présentation fini sur  $O_K$ , son complété formel  $\mathfrak{X}$  le long de la fibre spéciale est un schéma formel localement topologiquement de type fini. Alors,  $\mathfrak{X}_\eta$  s'identifie naturellement à un domaine analytique fermé de  $X^{\text{an}}$ . L'immersion  $\mathfrak{X}_\eta \rightarrow X^{\text{an}}$  est un isomorphisme si  $X \rightarrow O_K$  est propre ([6, sect. 5]).

### 1.1.6 Morphismes étales et morphismes lisses

Un morphisme  $\phi : Y \rightarrow X$  est *quasifini* si pour tout point  $y$  de  $Y$ , il existe des voisinages ouverts  $V$  de  $y$  et  $U$  de  $\phi(y)$  contenant  $\phi(V)$  tel que  $\phi : V \rightarrow U$  soit fini (c'est-à-dire pour tout domaine affinoïde  $U_0$  de  $U$ ,  $V \cap \phi^{-1}(U_0) \rightarrow U_0$  est un morphisme fini d'espaces  $K$ -affinoïdes).

Un morphisme  $Y \rightarrow X$  est plat si pour tout  $y \in Y$ ,  $O_{Y,y}$  est une  $O_{X,\phi(y)}$ -algèbre plate.

Un morphisme  $\phi : Y \rightarrow X$  est  $G$ -localement une immersion fermée si il existe un quasifilet  $\tau$  sur  $Y$  de domaines analytiques et pour tout  $V \in \tau$  un domaine analytique  $U$  de  $X$  contenant l'image de  $V$  tel que  $\phi_{V/U} : V \rightarrow U$  soit une immersion fermée (c'est-à-dire pour tout domaine affinoïde  $U_0$  de  $U$ ,  $V \cap \phi^{-1}(U_0) \rightarrow U_0$  est une immersion fermée d'espaces  $K$ -affinoïdes). Si  $X \rightarrow Y$  est  $G$ -localement une immersion fermée, et  $V \rightarrow U$  sont comme précédemment, soit  $\mathcal{J}$  l'idéal de  $O_{U_G}$  correspondant à  $V$ .  $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2$  est un  $O_{V_G}$ -module, qui se recollent en un  $O_{Y_G}$ -module, appelé *faisceau conormal* de  $\phi$ .

Si  $\phi : Y \rightarrow X$  est maintenant un morphisme d'espaces  $K$ -analytiques, le morphisme diagonal  $\Delta : Y \rightarrow Y \times_X Y$  est  $G$ -localement une immersion fermée, et son faisceau conormal est appelé *faisceau des différentielles* de  $\phi$ , et noté  $\Omega_{Y_G/X_G}$ .

*Remarque.* Dans les définitions précédentes, quand  $X$  et  $Y$  sont de bons espaces  $K$ -analytiques (ce qui sera en fait quasiment toujours le cas dans cette thèse), on peut faire les constructions précédentes pour la topologie usuelle de  $Y$ , obtenant ainsi un faisceau  $\Omega_{Y/X}$  sur  $Y$ . Par pullback le long de  $Y_G \rightarrow Y$ , on retrouve bien  $\omega_{Y_G/X_G}$ .

Un morphisme  $Y \rightarrow X$  est *étale* si il est quasifini, plat et  $\Omega_{Y_G/X_G}$  est nul. La catégorie des germes de revêtements étales finis en un point  $x$  est équivalente à la catégorie des revêtements étales finis de  $\mathcal{H}(x)$ .

Ceci permet à Berkovich de définir en [5, sect. 4.1] une *topologie étale* sur un espace  $K$ -analytique  $X$  : c'est la topologie de Grothendieck sur la catégorie  $\text{Ét}(X)$  des espaces  $K$ -analytiques étales sur  $X$  où les recouvrements d'un objet  $U$  sont les familles  $(f_i : U_i \rightarrow U)$  telles que  $U = \bigcup_i f_i(U_i)$ . On note  $X_{\text{ét}}$  le topos associé.

Berkovich définit également dans [6, sect. 3] une topologie *quasi-étale* qui pour la topologie étale joue le rôle que la  $G$ -topologie joue pour la topologie usuelle. On dit qu'un morphisme  $\phi : Y \rightarrow X$  est *quasi-étale* si l'ensemble des domaines affinoïdes  $V$  de  $Y$  tels que le morphisme induit  $V \rightarrow X$  puisse se factoriser en  $V \rightarrow U \rightarrow X$  où  $U \rightarrow X$  est étale et  $V \rightarrow U$  est l'immersion d'un domaine affinoïde forme un quasifilet. La topologie quasi-étale sur  $X$  est alors la topologie de Grothendieck sur la catégorie  $\text{Qét}(X)$  des morphismes quasi-étales  $U \rightarrow X$  engendrée par la prétopologie où une famille  $(f_i : U_i \rightarrow U)_{i \in I}$  est un recouvrement si  $(f_i(U_i))_{i \in I}$  est un quasifilet.

Si  $\mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{X}$  est un morphisme étale de schémas formels localement topologiquement de présentation finie sur  $\text{Spf } O_K$ ,  $\mathfrak{Y}_\eta \rightarrow \mathfrak{X}_\eta$  est quasi-étale ([6, prop. 2.3]). On en déduit un morphisme de topos  $\mathfrak{X}_{\eta_{\text{qét}}} \rightarrow \mathfrak{X}_{s\text{ét}}$ .

Un morphisme  $Y \rightarrow X$  est *lisse* si localement sur  $Y$  (pour la topologie usuelle), il peut se factoriser en  $Y \rightarrow \mathbf{A}^d \times X \rightarrow X$  avec  $Y \rightarrow \mathbf{A}^d \times X$  étale.

## 1.2 Groupe fondamental tempéré

### 1.2.1 Définition

Soit  $K$  un corps complet non archimédien.

Soit  $\mathbb{L}$  un ensemble de nombres premiers (dans le cas de l'ensemble des nombres premiers autres que la caractéristique résiduelle  $p$  de  $K$ , nous écrirons souvent  $(p')$  au lieu de  $\mathbb{L}$ ). Un  $\mathbb{L}$ -entier est un entier qui s'écrit comme produit d'éléments de  $\mathbb{L}$ .

Par commodité, nous traduirons provisoirement par " $K$ -variété" ce qui est appelé " $K$ -manifold" dans [1, §4], c'est-à-dire une  $K$ -variété est un  $K$ -espace strictement analytique lisse et paracompact au sens de Berkovich. Par exemple, si  $X$  est un  $K$ -schéma lisse,  $X^{\text{an}}$  est une  $K$ -variété (en pratique, nous nous intéressons principalement à ces espaces). D'après [7], toute  $K$ -variété est localement

contractile (nous expliquerons plus en détail les résultats de [7] dans la section 1.4). En particulier, elle a un revêtement universel.

On dit qu'un morphisme  $f : S' \rightarrow S$  de  $K$ -variétés est un *revêtement étale* si  $S$  est recouvert par des ouverts  $U$  tel que  $f^{-1}(U) = \coprod V_j$  et  $V_j \rightarrow U$  est étale fini ([11]).

Par exemple, les revêtements  $\mathbb{L}$ -finis (c'est-à-dire les revêtements étales finis dont l'ordre d'une clôture galoisienne est un  $\mathbb{L}$ -entier), que nous appellerons aussi *revêtements  $\mathbb{L}$ -algébriques* (dans le cas où les variétés proviennent de variétés algébriques), et les revêtements au sens topologique usuel pour la topologie de Berkovich, que nous appellerons aussi *revêtements topologiques*, sont des revêtements étales.

André définit alors la notion de revêtement tempéré dans [2, def. 2.1.1]. Nous généralisons ici la définition aux revêtements  $\mathbb{L}$ -tempérés (quand  $\mathbb{L}$  est l'ensemble de tous les nombres premiers, on retrouve la définition de revêtements tempérés) :

**Définition 1.2.1.** Un revêtement étale  $S' \rightarrow S$  est  $\mathbb{L}$ -tempéré si c'est le quotient du composé d'un revêtement topologique  $T' \rightarrow T$  et d'un revêtement étale  $\mathbb{L}$ -fini  $T \rightarrow S$ .

Ici, un quotient  $T' \rightarrow S'$  est simplement un morphisme surjectif de revêtements étales.

Ceci équivaut à dire que  $S' \rightarrow S$  devient un revêtement topologique après pull-back par un revêtement étale  $\mathbb{L}$ -fini.

Nous noterons  $\text{Cov}^{\text{temp}}(X)^{\mathbb{L}}$  (resp.  $\text{Cov}^{\text{alg}}(X)^{\mathbb{L}}$ ,  $\text{Cov}^{\text{top}}(X)$ ) la catégorie des revêtements  $\mathbb{L}$ -tempérés (resp.  $\mathbb{L}$ -algébriques, topologiques) de  $X$  (muni des morphismes évidents).

Un *point géométrique* d'une  $K$ -variété  $X$  est un morphisme d'espaces de Berkovich  $\mathcal{M}(\Omega) \rightarrow X$  où  $\Omega$  est une extension isométrique séparablement close de  $K$ .

Soit  $\bar{x}$  un point géométrique de  $X$ . On a un foncteur

$$F_{\bar{x}}^{\mathbb{L}} : \text{Cov}^{\text{temp}}(X)^{\mathbb{L}} \rightarrow \text{Ens}$$

qui envoie un revêtement  $S \rightarrow X$  sur l'ensemble  $S_{\bar{x}}$ . Si  $\bar{x}$  et  $\bar{x}'$  sont deux points géométriques d'une même composante connexe de  $X$ , alors  $F_{\bar{x}}^{\mathbb{L}}$  et  $F_{\bar{x}'}^{\mathbb{L}}$  sont (non canoniquement) isomorphes ([11, prop. 2.9]).

Le groupe fondamental tempéré de  $X$  pointé en  $\bar{x}$  est par définition

$$\pi_1^{\text{temp}}(X, \bar{x})^{\mathbb{L}} = \text{Aut } F_{\bar{x}}^{\mathbb{L}}.$$

Si  $X$  est un  $K$ -schéma lisse, on notera simplement  $\text{Cov}^{\text{temp}}(X)^{\mathbb{L}}$  et  $\pi_1^{\text{temp}}(X, \bar{x})^{\mathbb{L}}$  à la place de  $\text{Cov}^{\text{temp}}(X^{\text{an}})^{\mathbb{L}}$  et  $\pi_1^{\text{temp}}(X^{\text{an}}, \bar{x})^{\mathbb{L}}$ .

En considérant les stabilisateurs  $(\text{Stab}_{F(S)}(s))_{S \in \text{Cov}^{\text{temp}}(X)^{\mathbb{L}}, s \in F_{\bar{x}}(S)}$  comme une base de voisinages ouverts de  $\pi_1^{\text{temp}}(X, \bar{x})^{\mathbb{L}}$ ,  $\pi_1^{\text{temp}}(X, \bar{x})^{\mathbb{L}}$  devient un groupe topologique. C'est un groupe topologique prodiscret.

*Remarque.* Si  $X$  est une variété algébrique, le foncteur  $\text{Cov}^{\text{alg}}(X^{\text{an}})^{\mathbb{L}} \rightarrow \text{Cov}^{\text{alg}}(X)^{\mathbb{L}}$  est une équivalence de catégories dans chacun des cas suivants :

- $K$  est de caractéristique nulle :

- $X \rightarrow K$  est propre ;
- la caractéristique de  $K$  n'est pas dans  $\mathbb{L}$ .

Si  $X$  est algébrique,  $K$  est de caractéristique 0 et a seulement un nombre fini d'extensions d'ordre fixé dans une clôture algébrique  $\bar{K}$ ,  $\pi_1^{\text{temp}}(X, \bar{x})^{\mathbb{L}}$  a un système dénombrable de voisinages de 1 et tout quotient discret est finiment engendré ([2, prop. 2.1.7]).

Si  $\bar{x}$  et  $\bar{x}'$  sont deux points géométriques, alors  $F_{\bar{x}}^{\mathbb{L}}$  et  $F_{\bar{x}'}^{\mathbb{L}}$  sont (non canoniquement) isomorphes ([11, prop. 2.9]). Comme d'habitude, le groupe fondamental tempéré dépend du point-base uniquement à automorphisme intérieur près (ce groupe, considéré à conjugaison près, est alors simplement noté  $\pi_1^{\text{temp}}(X)^{\mathbb{L}}$ ). La sous-catégorie pleine des revêtements  $\mathbb{L}$ -tempérés  $S$  pour lesquels  $F_{\bar{x}}^{\mathbb{L}}(S)$  est  $\mathbb{L}$ -fini est équivalente à  $\text{Cov}^{\text{alg}}(X)^{\mathbb{L}}$ , d'où l'isomorphisme

$$(\pi_1^{\text{temp}}(X, \bar{x})^{\mathbb{L}})^{\mathbb{L}} = \pi_1^{\text{alg}}(X, \bar{x})^{\mathbb{L}}$$

(où  $( )^{\mathbb{L}}$  note le complété pro- $\mathbb{L}$ ).

Pour tout morphisme  $X \rightarrow Y$ , le changement de base définit un foncteur  $\text{Cov}^{\text{temp}}(Y)^{\mathbb{L}} \rightarrow \text{Cov}^{\text{temp}}(X)^{\mathbb{L}}$ . Si  $\bar{x}$  est un point géométrique de  $X$  d'image  $\bar{y}$  dans  $Y$ , on obtient un morphisme continu

$$\pi_1^{\text{temp}}(X, \bar{x})^{\mathbb{L}} \rightarrow \pi_1^{\text{temp}}(Y, \bar{y})^{\mathbb{L}}$$

(d'où un morphisme "extérieur"  $\pi_1^{\text{temp}}(X)^{\mathbb{L}} \rightarrow \pi_1^{\text{temp}}(Y)^{\mathbb{L}}$ ).

On a un analogue de la correspondance de Galois usuelle :

**Théorème 1.2.1** ([2, th. 1.4.5]).  *$F_{\bar{x}}^{\mathbb{L}}$  induit une équivalence de catégories entre la catégorie des sommes directes de revêtements  $\mathbb{L}$ -tempérés de  $X$  et la catégorie  $\pi_1^{\text{temp}}(X, \bar{x})^{\mathbb{L}}$ -Ens des ensembles discrets munis d'une action continue à gauche de  $\pi_1^{\text{temp}}(X, \bar{x})^{\mathbb{L}}$ .*

Une somme directe de revêtements tempérés n'est pas nécessairement un revêtement tempéré. Ainsi  $f : S = \coprod_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbf{G}_m \rightarrow \mathbf{G}_m$ , où la  $n^{\text{e}}$  copie de  $\mathbf{G}_m$  s'envoie sur  $\mathbf{G}_m$  par  $x \mapsto x^n$ , n'est pas un revêtement tempéré (les degrés  $[\mathcal{H}(s) : \mathcal{H}(f(s))]$  ne sont pas bornés quand  $s$  décrit  $S$ ).

Si  $S$  est un revêtement galoisien  $\mathbb{L}$ -fini de  $X$ , son revêtement topologique universel  $S^{\infty}$  est encore galoisien et tout revêtement  $\mathbb{L}$ -tempéré est dominé par un tel revêtement  $\mathbb{L}$ -tempéré galoisien.

Si  $((S_i, \bar{s}_i))_{i \in I}$  est un système projectif cofinal de revêtements  $\mathbb{L}$ -finis galoisiens géométriquement pointés de  $(X, \bar{x})$ , soit  $((S_i^{\infty}, \bar{s}_i^{\infty}))_{i \in I}$  le système projectif, muni des morphismes  $f_{ij}^{\infty}$  pour  $i \geq j$ , des revêtements topologiques pointés universels. Alors  $F_{\bar{x}}^{\mathbb{L}}(S_i^{\infty}) = \pi_1^{\text{temp}}(X, \bar{x})^{\mathbb{L}} / \text{Stab}_{F(S_i^{\infty})}(\bar{s}_i^{\infty})$  est naturellement un groupe quotient  $G$  de  $\pi_1^{\text{temp}}(X, \bar{x})^{\mathbb{L}}$  pour lequel  $s_i^{\infty}$  est l'élément neutre. De plus  $G$  agit par  $G$ -automorphismes sur  $F_{\bar{x}}^{\mathbb{L}}(S_i^{\infty})$  par translation à droite (et donc aussi sur  $S_i^{\infty}$  grâce à la correspondance galoisienne (théorème 1.2.1)). On obtient un morphisme  $\pi_1^{\text{temp}}(X, \bar{x})^{\mathbb{L}} \rightarrow \text{Gal}(S_i^{\infty}/X)$ . Comme  $f_{ij}^{\infty}(s_i^{\infty}) = s_j^{\infty}$ , ces morphismes sont compatibles avec  $\text{Gal}(S_i^{\infty}/X) \rightarrow \text{Gal}(S_j^{\infty}/X)$ .

Alors, grâce à [2, lem. III.2.1.5],

**Proposition 1.2.2.**

$$\pi_1^{\text{temp}}(X, \bar{x})^{\mathbb{L}} \rightarrow \varprojlim \text{Gal}(S_i^{\infty}/X)$$

est un isomorphisme.

Donnons maintenant une description de la catégorie des revêtements tempérés qui fait uniquement intervenir la catégorie des revêtements topologiques de tous les revêtements étales finis.

On dispose d'une catégorie fibrée  $\mathcal{D}_{\text{top}}(X) \rightarrow \text{Cov}^{\text{alg}}(X)$ , où la fibre  $\mathcal{D}_{\text{top}}(X)_S$  en un revêtement algébrique  $S$  de  $X$  est  $\text{Cov}^{\text{top}}(X)$ .

$\mathcal{D}_{\text{top}}(X)$  est un préchamp sur  $\text{Cov}^{\text{alg}}(X)$  muni de sa topologie canonique au sens de [16, déf. II.1.2.1].

Soit  $\mathcal{D}_{\text{temp}}(X) \rightarrow \text{Cov}^{\text{alg}}(X)$  la catégorie fibrée dont la fibre en  $S$  est la catégorie  $\text{Cov}^{\text{temp}}(U)$  des revêtements tempérés de  $U$ .  $\mathcal{D}_{\text{temp}}(X)$  est un champ. Le foncteur cartésien pleinement fidèle de préchamps  $\mathcal{D}_{\text{top}}(X) \rightarrow \mathcal{D}_{\text{temp}}(X)$  induit un foncteur cartésien pleinement fidèle de champs  $\mathcal{D}_{\text{top}}(X)^a \rightarrow \mathcal{D}_{\text{temp}}(X)$  où  $\mathcal{D}_{\text{top}}(X)^a$  est le champ associé à  $\mathcal{D}_{\text{top}}(X)$ . Puisqu'un revêtement tempéré est topologique localement sur  $\text{Cov}^{\text{alg}}(X)$ , ce foncteur est en fait une équivalence ([16, th. II.2.1.3]).

De même le champ  $(\mathcal{D}_{\text{top}}(X)|_{\text{Cov}^{\text{alg}}(X)^{\mathbb{L}}})^a$  est naturellement équivalent au champ  $\mathcal{D}_{\text{temp}}(X)^{\mathbb{L}}$  des revêtements  $\mathbb{L}$ -tempérés sur  $\text{Cov}^{\text{alg}}(X)^{\mathbb{L}}$ .

Comme les revêtements galoisiens sont cofinaux parmi les recouvrements de l'objet final de  $\text{Cov}^{\text{alg}}(X)^{\mathbb{L}}$ , on a la description suivante.

Soit  $S$  un revêtement  $\mathbb{L}$ -fini de  $X$ . Posons  $\text{DD}_{\text{temp}_S}$  la catégorie des données de descente dans la catégorie fibrée  $\mathcal{D}_{\text{top}}(X)$  par rapport à  $S \rightarrow X$ .  $\text{DD}_{\text{temp}_S}$  est naturellement équivalente à la sous-catégorie pleine de  $\text{Cov}^{\text{temp}}(X)$  des revêtements tempérés qui deviennent topologiques après le changement de base  $S \rightarrow X$ .

Si " $\varprojlim$ "  $S_i$  est un pro-revêtement  $\mathbb{L}$ -fini universel  $(X, x)$ , on obtient une équivalence naturelle

$$\text{Cov}^{\text{temp}}(X)^{\mathbb{L}} = \varprojlim_i \text{DD}_{\text{temp}_{S_i}}.$$

Nous utiliserons également les deux résultats suivants :

**Proposition 1.2.3.** ([2, prop. III.1.1.4]) *Soient  $\bar{S}$  une  $K$ -variété et  $S$  un ouvert de Zariski dense. Alors tout revêtement topologique de  $S$  s'étend de façon unique en un revêtement topologique de  $\bar{S}$ . Ainsi  $\pi_1^{\text{top}}(S, s) \rightarrow \pi_1^{\text{top}}(\bar{S}, s)$  est un isomorphisme.*

**Proposition 1.2.4** ([2, th. III.2.1.11, prop. III.2.1.13]). *Supposons  $K$  algébriquement clos de caractéristique nulle. Soit  $\bar{S}$  une  $K$ -variété et soit  $S$  un ouvert de Zariski dense. Alors le foncteur de la catégorie des revêtements tempérés  $\bar{S}$  vers la catégorie des revêtements tempérés de  $S$  est pleinement fidèle. Si  $Z := \bar{S} \setminus S$  est de codimension  $\geq 2$ , ce foncteur est une équivalence de catégories.*

On en déduit immédiatement un résultat analogue pour les revêtements  $\mathbb{L}$ -tempérés.

### 1.2.2 Résultats de Mochizuki sur le groupe fondamental $(p')$ -tempéré d'une courbe

S. Mochizuki décrit dans [33] le groupe fondamental  $(p')$ -tempéré d'une courbe algébrique  $X$  en terme du graphe de la réduction stable de  $X$ . Il prouve en particulier qu'on peut reconstruire le graphe de la réduction stable de  $X$  à partir de  $\pi_1^{\text{temp}}(X, \bar{x})$ .

Expliquons ici certains résultats majeurs de son article.

Un *semigraphe*  $\mathbb{G}$  est donné par un ensemble  $\mathcal{V}$  de "sommets", un ensemble  $\mathcal{E}$  d'"arêtes" et, pour tout  $e \in \mathcal{E}$ , un ensemble  $\mathcal{B}_e$  de "branches" ayant au plus 2 éléments et muni d'une fonction  $\zeta_e : \mathcal{B}_e \rightarrow \mathcal{V}$  ([32, Appendix]).

Nous dirons qu'une branche  $b$  de  $e$  *aboutit* en  $v$  si  $\zeta_e(b) = v$ . Nous dirons qu'un semigraphe est un *graphe* si pour tout  $e \in \mathcal{E}$ ,  $e$  a exactement deux branches.

Rappelons que si  $\mathbb{G}$  est un semigraphe, une structure de *semigraphe d'anabélioides* sur ce graphe correspond à la donnée suivante :

- pour tout sommet ou arête  $x$ , une catégorie galoisienne (aussi nommée anabélioïde connexe dans [33])  $\mathcal{G}_x$  ;
- pour toute branche  $b$  d'une arête  $e$  aboutissant en un sommet  $v$ , un morphisme d'anabélioides (c'est-à-dire un foncteur exact)  $b_* : \mathcal{G}_e \rightarrow \mathcal{G}_v$ .

Les semigraphes d'anabélioides forment une 2-catégorie. Rappelons aussi que travailler avec des catégories galoisiennes équivaut à travailler avec les groupes profinis à automorphismes intérieurs près.

Si  $\mathcal{C}$  est une catégorie galoisienne de groupe fondamental  $\Pi$ , alors  $\text{Ind-}\mathcal{C}$  est équivalente au topos  $\Pi\text{-Ens}$ .

Un *revêtement*  $S$  d'un semigraphe d'anabélioides  $\mathcal{G}$ , de semigraphe sous-jacent  $\mathbb{G}$ , consiste en :

- pour tout sommet  $v$  de  $\mathbb{G}$ , un objet  $S_v$  de  $\text{Ind-}\mathcal{G}_v$ ,
- pour toute arête  $e$  de branches  $b_1$  et  $b_2$  aboutissant en  $v_1$  et  $v_2$  respectivement, un isomorphisme  $\phi_e$  entre  $b_{1*}S_{v_1}$  et  $b_{2*}S_{v_2}$ .

On a une définition naturelle de morphisme de revêtements, d'où une catégorie  $\mathcal{B}^{\text{cov}}(\mathcal{G})$ . Mochizuki définit aussi un 2-foncteur de la catégorie des revêtements de  $\mathcal{G}$  vers la 2-catégorie des semigraphes d'anabélioides au-dessus de  $\mathcal{G}$ .

Un objet de  $\mathcal{B}^{\text{cov}}(\mathcal{G})$  est fini si tout  $S_v$  est dans  $\mathcal{G}_v$ , *topologique* si tout  $S_v$  est un objet constant de  $\text{Ind-}\mathcal{G}_v$ , et *tempéré* si il devient topologique après changement de base par un revêtement fini. La sous-catégorie pleine des revêtements tempérés (resp. finis, resp. topologiques) est notée  $\mathcal{B}^{\text{temp}}(\mathcal{G})$  (resp.  $\mathcal{B}^{\text{alg}}(\mathcal{G})$ , resp.  $\mathcal{B}^{\text{top}}(\mathcal{G})$ ).

Si  $\mathbb{G}$  est connexe,  $\mathcal{B}^{\text{alg}}(\mathcal{G})$  est une catégorie galoisienne et son groupe fondamental est noté  $\pi_1^{\text{alg}}(\mathcal{G})$ .

Si  $v$  est un sommet de  $\mathbb{G}$  et  $F$  est un foncteur exact et conservatif de  $\mathcal{G}_v$  vers la catégorie  $\mathbf{fEns}$  des ensembles finis (un tel foncteur est appelé foncteur fondamental dans [17, section 5] ; il s'étend en un point du topos  $\text{Ind-}\mathcal{G}_v$ , aussi noté  $F$ ), on peut définir un foncteur  $F_{(v,F)} : \mathcal{B}^{\text{cov}}(\mathcal{G}) \rightarrow \mathbf{Ens}$  qui envoie  $S$  sur  $F(S_v)$  (si on change le point-base  $(v, F)$ , les foncteurs obtenus sont isomorphes), et soit  $F_{(v,F)}^{\text{temp}}$  sa restriction à  $\mathcal{B}^{\text{temp}}(\mathcal{G})$ . On définit alors

$$\pi_1^{\text{temp}}(\mathcal{G}, (v, F)) := \text{Aut}(F_{(v,F)}^{\text{temp}}).$$



Illustrons ces définitions en associant à une courbe un semigraphe d'anabélioides.

Supposons  $K$  de valuation discrète, et soit  $\overline{K}$  le complété d'une clôture séparable de  $K$ .

Soit  $(\overline{X}, D)$  une courbe hyperbolique lisse  $n$ -pointée de genre  $g$  sur  $K$ , soit  $X = \overline{X} \setminus D$ . Si  $K'$  est une extension finie de  $K$ , un modèle semistable de  $X_{K'}$  sur  $O_{K'}$  est donné par un morphisme de schémas  $\overline{\mathcal{X}}_{O_{K'}} \rightarrow \text{Spec } O_{K'}$  propre et plat dont la fibre générique est  $\overline{X}_{K'}$  et dont la fibre spéciale géométrique est réduite et a seulement des points doubles ordinaires comme singularités et par un diviseur  $D_{O_{K'}}$  de  $\overline{\mathcal{X}}_{O_{K'}}$  prolongeant  $D_{K'}$  à support dans le lieu lisse de  $\overline{\mathcal{X}}_{O_{K'}}$  et tel que  $D_{O_{K'}} \rightarrow \text{Spec } \hat{O}_{K'}$  soit étale. Il existe toujours une extension finie de  $K$  pour laquelle il existe un tel modèle semistable (cf. [12]).

Soit  $(\overline{\mathcal{X}}_{O_{K'}}, \mathcal{D}_{K'})$  un modèle semistable sur  $O_{K'}$  où  $K'$  est une extension finie de  $K$ . Soit  $(\overline{\mathcal{X}}, \mathcal{D})$  son pullback à  $O_{\overline{K}}$  et soit  $\mathcal{X} = \overline{\mathcal{X}} \setminus \mathcal{D}$ .

Le semigraphe de la fibre spéciale  $\mathcal{X}_s$  de  $\mathcal{X}$  est défini ainsi : les sommets sont les composantes irréductibles de  $\mathcal{X}_s$ , les arêtes sont les points doubles et les points marqués. Un point double  $e$  a deux branches qui aboutissent aux composantes irréductibles contenant  $e$  ; un point marqué  $e$  a une seule branche aboutissant à la composante irréductible contenant le point marqué.

Quand  $\mathcal{X}$  est le modèle stable de  $X$ , ce semigraphe est noté  $\mathbb{G}_X^c$  (ou  $\mathbb{G}^c$  s'il n'y a pas de risque de confusion).

On peut munir ce semigraphe  $\mathbb{G}^c$  d'une structure de semigraphe d'anabélioides  $\mathcal{G}^c$ . Pour un sommet  $v_i$  correspondant à une composante irréductible  $C_i$  de  $\mathcal{X}_s$ , considérons l'ouvert  $U_i$  du normalisé  $\overline{C}_i'$  de  $\overline{C}_i$  qui est le complémentaire des points marqués et des préimages des points doubles de  $\mathcal{X}_s$  (les points de  $\overline{C}_i' - U_i$  correspondent exactement aux branches aboutissant en  $v_i$ ). Alors le groupe  $\Pi_{(v_i)}$  est le groupe fondamental modéré  $\pi_1^t(U_i)$  de  $U_i$ . Le groupe d'une arête est  $\widehat{\mathbf{Z}(1)}^{(p')} = \varprojlim_{(n,p)=1} \mu_n (\simeq \widehat{\mathbf{Z}}^{(p')})$  (comme d'habitude, l'exposant  $(p')$  indique le quotient maximal premier à  $p$ , où  $p$  est la caractéristique résiduelle de  $O_K$ ), qui est canoniquement isomorphe au sous-groupe de monodromie de  $\pi_1^t(U_i)$  d'un point de  $\overline{C}_i' - U_i$ . Le morphisme correspondant à une branche est le plongement du groupe de monodromie du point correspondant de  $\overline{C}_i' - U_i$  (qui est défini à conjugaison près), tandis que, pour une arête avec deux branches, on identifie les deux  $\widehat{\mathbf{Z}(1)}^{(p')}$  par  $x \mapsto x^{-1}$ .

Si  $\mathcal{G}^{c,(p')}$  est le semigraphe d'anabélioides obtenu à partir de  $\mathcal{G}^c$  en remplaçant chaque groupe profini par son complété pro- $(p')$ ,

$$\pi_1^{\text{temp}}(\mathcal{G}_X^{c,(p')}) = \pi_1^{\text{temp}}(X_{\overline{K}})^{(p')} \quad ([33, \text{ex. 3.10}]).$$

Nous généraliserons cette description en dimension supérieure dans le chapitre 5. Supposons maintenant de plus  $K$  de caractéristique mixte. Mochizuki montre alors<sup>1</sup> :

**Théorème 1.2.5** ([33, cor. 3.11]). *Si  $X_\alpha$  et  $X_\beta$  sont deux courbes, tout isomorphisme  $\gamma : \pi_1^{\text{temp}}(X_{\alpha, \overline{K}}) \simeq \pi_1^{\text{temp}}(X_{\beta, \overline{K}})$  détermine, fonctoriellement en  $\gamma$  à*

1. Dans [33], Mochizuki suppose que  $K$  est une extension finie de  $\mathbb{Q}_p$ , mais la preuve s'adapte pour  $K$  à valuation discrète de caractéristique mixte (voir [30, rem. 2.11.1]).

2-isomorphisme près, un isomorphisme de semigraphes d'anabélioides  $\gamma' : \mathcal{G}_{X_\alpha}^c \simeq \mathcal{G}_{X_\beta}^c$ .

Plus précisément, le diagramme induit de groupes topologiques est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1^{\text{temp}}(\mathcal{G}_{X_\alpha}^{c,(p')}) & \xrightarrow{\pi_1^{\text{temp}}(\gamma'(p'))} & \pi_1^{\text{temp}}(\mathcal{G}_{X_\beta}^{c,(p')}) \\ \parallel & & \parallel \\ \pi_1^{\text{temp}}(X_{\alpha,\bar{K}})^{(p')} & \xrightarrow{\gamma^{(p')}} & \pi_1^{\text{temp}}(X_{\beta,\bar{K}})^{(p')} \end{array} .$$

Les sommets du graphe correspondent aux classes de conjugaison de sous-groupes compacts maximaux de  $\pi_1^{\text{temp}}(X)^{(p')}$  (appelés sous-groupes *verticiels* de  $\pi_1^{\text{temp}}(X)^{(p')}$ ), et les arêtes ayant deux branches correspondent aux classes de conjugaison d'intersections non triviales de sous-groupes verticiels ([33, th. 3.7]).

### 1.3 Groupes fondamentaux logarithmiques

Cette section rappelle les notions de base et quelques résultats de la théorie des log schémas (voir [25] et [35]) et du groupe fondamental logarithmique (voir [21] or [38]).

#### 1.3.1 Log schémas

Tous les monoïdes considérés ici sont commutatifs et unitaires, et un morphisme de monoïdes est supposé préserver l'élément unité. Si  $P$  est un monoïde,  $P^{\text{gp}}$  désignera le groupe associé (symétrisé),  $P^*$  désignera le groupe des éléments inversibles de  $P$  et  $\bar{P} = P/P^*$ .

Si  $a, b \in P$ , nous considérerons la relation de préordre suivante :  $a|b$  si et seulement si il existe  $c \in P$  tel que  $b = ac$ .

Un monoïde  $P$  est *aigu* (sharp) si  $P^* = \{1\}$ .

Un monoïde  $P$  est *intègre* si le morphisme  $P \rightarrow P^{\text{gp}}$  est injectif. Un monoïde est *fin* si il est intègre et de type fini. Un monoïde intègre  $P$  est *saturé* si  $a \in P^{\text{gp}}$  est dans  $P$  dès qu'il existe  $n \geq 1$  tel que  $a^n \in P$ .

Si  $P$  est un monoïde fin et saturé (ce qu'on abrégera en fs),  $P^{\text{gp}}/P^* = \bar{P}^{\text{gp}}$  est un groupe abélien libre de type fini, et donc il existe une section (non canonique)  $\bar{P}^{\text{gp}} \rightarrow P^{\text{gp}}$  qui induit une décomposition  $P = P^* \times \bar{P}$ .

Un morphisme  $f : P \rightarrow Q$  de monoïdes est *local* si  $f^{-1}(Q^*) = P^*$ . Un morphisme  $P \rightarrow Q$  de monoïdes intègres est *exact* si  $P$  est l'image inverse de  $Q$  dans  $P^{\text{gp}}$ .

Un *idéal premier*  $\mathfrak{p}$  d'un monoïde intègre  $P$  est un sous-ensemble de  $P$  tel que si  $p \in \mathfrak{p}$  et  $p' \in P$  alors  $p \cdot p' \in \mathfrak{p}$ , et si  $p, p' \in P$  et  $p \cdot p' \in \mathfrak{p}$  alors  $p \in \mathfrak{p}$  ou  $p' \in \mathfrak{p}$ .

Un sous-ensemble  $F$  d'un monoïde intègre  $P$  est une *face* si  $P \setminus F$  est un idéal premier (en particulier  $F$  est un sous-monoïde de  $P$ ).

$\text{Spec } P$  désigne l'espace topologique des idéaux premiers de  $P$ , où  $(D(f) = \{\mathfrak{p}, f \notin \mathfrak{p}\})_{f \in P}$  est une base de la topologie de  $\text{Spec } P$ .

Si  $f : P \rightarrow Q$  est un morphisme de monoïdes intègres et  $\mathfrak{q}$  est un idéal premier de  $Q$ , alors  $f^{-1}(\mathfrak{q})$  est un idéal premier de  $P$ , d'où une application continue  $\text{Spec } Q \rightarrow \text{Spec } P$ .

Une *pré-log structure* sur un schéma  $X$  est un couple  $(M, \alpha)$  où  $M$  est un faisceau en monoïdes sur  $X_{\text{ét}}$ , et  $\alpha : M \rightarrow (O_X, \cdot)$  est un morphisme de faisceaux en monoïdes, où  $O_X$  est le faisceau canonique de  $X$  et  $\cdot$  est la multiplication sur  $O_X$ . Une pré-log structure est une *log structure* si le morphisme induit  $\alpha^{-1}(O_X^*) \rightarrow O_X^*$  est un isomorphisme. Un *log schéma*  $X$  est un schéma (le schéma sous-jacent  $\check{X}$  au log-schéma  $X$ ) muni d'une log structure.

Le foncteur banal des log structures sur  $X$  vers les pré-log structures sur  $X$  admet un adjoint à gauche  $(M, \alpha) \mapsto (M^a, \alpha^a)$  où  $M^a$  est la somme amalgamée de  $M$  et  $O_X$  le long de  $\alpha^{-1}(O_X^*)$  (cette log structure est dite *associée* à  $(M, \alpha)$ ). Un *morphisme de log schémas*  $f : (X, M, \alpha) \rightarrow (Y, N, \beta)$  est un morphisme de schémas  $f : X \rightarrow Y$  muni d'un morphisme de faisceaux en monoïdes  $f^*N \rightarrow M$  compatible avec  $\alpha$  et  $\beta$ . Alors  $f^*N \rightarrow M$  est nécessairement un morphisme local de faisceaux de monoïdes.

Un log schéma  $X$  est *intègre* si pour tout point géométrique  $\bar{x}$  de  $\check{X}$ ,  $M_{\bar{x}}$  est intègre.

Si  $Y = (Y, N, \beta)$  est un log schéma et  $X \rightarrow \check{Y}$  est un morphisme de schémas, la log structure sur  $X$  associée à  $(f^*N, f^*\beta)$  est appelée *log structure image inverse* et est notée  $f^*N$ . Un morphisme de log schémas  $f : (X, M, \alpha) \rightarrow (Y, N, \beta)$  est *strict* si le morphisme induit  $f^*N \rightarrow M$  est un isomorphisme (si  $X$  est intègre, cela équivaut à dire que  $\overline{N}_{f(\bar{x})} \rightarrow \overline{M}_{\bar{x}}$  est un isomorphisme pour tout point géométrique  $\bar{x}$  de  $X$ ).

Si  $P$  est un monoïde, la log structure sur  $\text{Spec } \mathbf{Z}[P]$  associée à la pré-log structure définie par  $P \rightarrow \mathbf{Z}[P]$  est appelée log structure canonique. Il y a une application canonique  $\text{Spec } \mathbf{Z}[P] \rightarrow \text{Spec } P$  qui envoie un idéal premier  $I$  de  $\mathbf{Z}[P]$  sur  $I \cap P$ .

Une *carte* (globale) modelée sur un monoïde  $P$  d'un log schéma  $X$  est un morphisme de faisceaux en monoïdes du faisceau constant  $P_X$  vers  $M$  induisant un isomorphisme sur les log structures associées. Cela revient à se donner un morphisme strict  $X \rightarrow \text{Spec } \mathbf{Z}[P]$ , où  $\mathbf{Z}[P]$  est muni de sa log structure canonique.

Si  $\bar{x}$  est un point géométrique, une carte  $P_X \rightarrow M$  modelée sur un monoïde intègre  $P$  est *exacte en  $\bar{x}$*  (resp. *bonne en  $\bar{x}$* ) si le morphisme induit  $\overline{P} \rightarrow \overline{M}_{\bar{x}}$  (resp.  $P \rightarrow \overline{M}_{\bar{x}}$ ) est un isomorphisme.

Un log schéma est *fin* (resp. *fin et saturé* ou fs pour abrégé) si il est intègre et, localement pour la topologie étale, il admet une carte modelée sur un monoïde fin (resp. fs).

Nous travaillerons principalement avec des log schémas fs. La catégorie des log schémas fs admet des produits fibrés, mais les produits fibrés ne commutent en général pas avec le foncteur d'oubli de la log structure, qui va de la catégorie des log schémas fs vers celle des schémas (cf. [35, § II.2.4] pour une discussion détaillée).

Si  $X \rightarrow \text{Spec } P$  est une carte fs et  $\bar{x}$  est un point géométrique de  $X$  qui s'envoie sur  $\mathfrak{p} \in \text{Spec } P$  et soit  $F = P \setminus \mathfrak{p}$ , alors  $P \rightarrow M_{\bar{x}}$  induit un isomorphisme  $\overline{F^{-1}P} \rightarrow \overline{M}_{\bar{x}}$ . De plus  $\text{Spec } \mathbf{Z}[F^{-1}P] \rightarrow \text{Spec } \mathbf{Z}[P]$  est une immersion ouverte, correspondant à la préimage de  $D(\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{p}' | \mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}'\} \subset \text{Spec } P$ . Ainsi  $F^{-1}P$  in-

duit une carte exacte d'un voisinage ouvert pour la topologie de Zariski de  $\bar{x}$ . Si l'on choisit une décomposition  $F^{-1}P = \overline{F^{-1}P} \oplus (F^{-1}P)^*$ , le morphisme induit  $\overline{F^{-1}P} \rightarrow F^{-1}P \rightarrow M_X$  est une bonne carte en  $\bar{x}$ .

Parfois, nous aurons besoin de log structure sur le site de Zariski. Soit  $\epsilon : X_{\text{Zar}} \rightarrow X_{\text{ét}}$  la projection naturelle. Nous dirons qu'une log structure  $M$  sur  $X$  est *zariskienne* (et le log schéma  $X$  est *log zariskien*) si  $\epsilon^* \epsilon_* M \rightarrow M$  est un isomorphisme. Si  $X$  est un log schéma fs, la log structure est zariskienne si et seulement si  $X$  admet des cartes localement pour la topologie de Zariski. En particulier tout log schéma fs est log zariskien localement pour la topologie étale.

Si  $f : X \rightarrow Y$  est un morphisme de log schémas fins, une *carte* de  $f$  est donnée par une carte  $X \rightarrow \text{Spec } \mathbf{Z}[P]$ , une carte  $Y \rightarrow \text{Spec } \mathbf{Z}[Q]$  et un morphisme  $Q \rightarrow P$  tel que le carré correspondant de log schémas soit commutatif. Tout morphisme de log schémas fins admet des cartes localement pour la topologie étale.

Un morphisme de log schémas fins  $f : X \rightarrow Y$  est *log lisse* (resp. *log étale*) étale localement sur  $X$  et  $Y$ ,  $f$  admet une carte  $u : Q \rightarrow P$  telle que le noyau et la torsion du conoyau (resp. le noyau et le conoyau) de  $u^{\text{gp}}$  soient des groupes finis d'ordre inversible sur  $X$  et telle que  $X \rightarrow Y \times_{\text{Spec } \mathbf{Z}[Q]} \text{Spec } \mathbf{Z}[P]$  soit étale. Il existe une caractérisation valuative des morphismes log lisses et log étales. Les morphismes log étales et log lisses sont stables par changement de base et par composition.

Un morphisme  $h : Q \rightarrow P$  de monoïdes fs est *kummérien* (resp.  $\mathbb{L}$ -kummérien) si  $h$  est injectif et pour tout  $a \in P$ , il existe un entier (resp. un  $\mathbb{L}$ -entier)  $n$  tel que  $na \in h(Q)$  (remarquons que si  $Q \rightarrow P$  est kummérien,  $\text{Spec } P \rightarrow \text{Spec } Q$  est un homéomorphisme).

Un morphisme  $f : X \rightarrow Y$  de log schémas fs est *kummérien* (resp. *exact*) si pour tout point géométrique  $\bar{x}$  de  $X$ ,  $\overline{M}_{Y,f(\bar{x})} \rightarrow \overline{M}_{X,\bar{x}}$  est kummérien (resp. exact). Un morphisme kummérien  $X \rightarrow Y$  de log schémas fs est un *homéomorphisme kummérien universel* (ou *kuh* pour abrégé) si le morphisme de schémas sous-jacents reste un homéomorphisme après n'importe quel changement de base de log schémas fs ([43, def. 2.1]).

Un morphisme Kummer  $q : X \rightarrow Y$  est kuh si et seulement si  $\hat{q}$  est un homéomorphisme universel (c'est-à-dire est entier, radiciel et surjectif; cf. [19, cor. 18.12.11]) et pour tout point géométrique  $\bar{x}$  de  $X$ ,  $\overline{M}_{Y,q(\bar{x})} = \overline{M}_{X,\bar{x}}$  est  $p$ -Kummer, où  $p$  est la caractéristique résiduelle de  $\bar{x}$  ([43, thm. 2.7]). Par exemple, si  $P \rightarrow Q$  est un morphisme  $p$ -Kummer de monoïdes fs, et  $A$  est une  $\mathbf{F}_p$ -algèbre, alors  $\text{Spec } A[Q] \rightarrow \text{Spec } A[P]$  est kuh.

Un log schéma fs  $X$  est *log régulier* si pour tout point géométrique  $\bar{x}$ ,  $O_{X,\bar{x}}/I_{\bar{x}}O_{X,\bar{x}}$  est régulier et  $\dim(O_{X,\bar{x}}/I_{\bar{x}}O_{X,\bar{x}}) = \dim(O_{X,\bar{x}}/I_{\bar{x}}O_{X,\bar{x}}) + \text{rk}(\overline{M}_{\bar{x}}^{\text{gp}})$  où  $I_{\bar{x}}$  est l'idéal de  $O_{X,\bar{x}}$  engendré par l'image de  $M_{\bar{x}} \setminus O_{X,\bar{x}}^*$  ([34, def. 2.2]).

Les log schémas log Zariski log réguliers sont étudiés dans [26].

Si  $X$  est log régulier,  $\hat{X}$  est normal.

La partie triviale d'un log schéma fs  $X_{\text{tr}} = \{x \in X, \overline{M}_{\bar{x}} = \{1\}\}$  (cette propriété ne dépend pas du choix du point géométrique  $\bar{x}$  au-dessus de  $x$  car ils sont tous isomorphes) de  $X$  est un sous-schéma ouvert de  $X$ . Si  $X$  est log régulier, on peut retrouver la log structure à partir de la partie triviale grâce à

l'isomorphisme suivant :

$$M = O_X \cap j_* O_{X_{\text{tr}}}^*$$

où  $j$  désigne l'immersion ouverte  $X_{\text{tr}} \rightarrow X$  ([34, prop. 2.6]).

Si  $Y$  est log régulier et  $X \rightarrow Y$  est log lisse, alors  $X$  est log régulier ([26, thm. 8.2]).

**Exemples.** Soit  $X$  un schéma régulier et  $D$  un diviseur à croisement normaux, alors  $M = O_X \cap j^* O_{X \setminus D}$  est une log structure fs qui fait de  $X$  un log schéma log régulier.

Si  $K$  est un corps complet pour une valuation discrète, on muni  $\text{Spec } O_K$  de la log structure associée à  $O_K \setminus \{0\} \rightarrow O_K$ .  $\text{Spec } O_K$  est alors un log schéma log régulier.

Si  $X \rightarrow \text{Spec } O_K$  est un morphisme plurinodal de schémas tel que  $X_K \rightarrow K$  soit lisse, alors  $M = O_X \cap j^* O_{X_{\text{tr}}}$  définit une log structure sur  $X$ , qui fait de  $X \rightarrow \text{Spec } O_K$  un morphisme de log schémas log lisse (cf. lemme 5.1.1 pour un résultat un peu plus général et une démonstration).

### 1.3.2 Revêtements két

Un morphisme de log schémas fs est *Kummer étale* (ou két pour abrégé) si il est Kummer et log étale.

Un morphisme  $f$  est két si et seulement si, localement pour la topologie étale, il est déduit par changement de base strict et par localisation étale d'un morphisme  $\text{Spec } \mathbf{Z}[P] \rightarrow \text{Spec } \mathbf{Z}[Q]$  induit par un morphisme  $\mathbb{L}$ -Kummer  $Q \rightarrow P$  de monoïdes fs avec  $\mathbb{L}$  inversible sur  $X$ .

En fait, si  $f : Y \rightarrow X$  est két,  $\bar{y}$  est un point géométrique de  $Y$ , et  $P \rightarrow M_X$  est une carte étale de  $X$  en  $f(\bar{y})$ , il y a un voisinage étale  $U$  de  $\bar{x}$  et un voisinage ouvert de Zariski  $V \subset f^{-1}(U)$  de  $\bar{y}$  tel que  $V \rightarrow U$  est isomorphe à  $U \times_{\text{Spec } \mathbf{Z}[P]} \text{Spec } \mathbf{Z}[Q] \rightarrow U$  avec  $P \rightarrow Q$  un morphisme  $\mathbb{L}$ -Kummer où  $\mathbb{L}$  est inversible sur  $U$  ([38, Prop. 3.1.4]).

Les morphismes két sont ouverts. Les morphismes két quasi-compacts sont quasi-finis.

N'importe quel morphisme de log schéma au-dessus de  $X$  entre deux log schémas két sur  $X$  est két. Pour une famille de morphismes két sur  $X$ , le fait d'être une famille ensemblistement couvrante est stable par changement de base fs. Ainsi, la catégorie  $X_{\text{két}}$  des log schémas fs két au-dessus de  $X$ , où les recouvrements  $(T_i \rightarrow T)$  de  $T$  sont les familles ensemblistement couvrante, est un site.  $\tilde{X}_{\text{két}}$  désignera le topos correspondant.

Tout faisceau localement constant et fini sur  $\tilde{X}_{\text{két}}$  est représentable. Un log schéma fs két au-dessus de  $X$  qui représente un tel faisceau localement constant et fini est un *revêtement két* de  $X$ . Nous noterons  $\text{KCov}(X)$  la catégorie des revêtements két de  $X$ .

Un *point log géométrique* est un log schéma  $s$  tel que :

- $\hat{s}$  est le spectre d'un corps séparablement clos  $k$  ;
- $M_s$  est saturé ;
- la multiplication par  $n$  sur  $\overline{M}_s$  est un isomorphisme pour tout  $n$  premier à la caractéristique de  $k$ .

Un point log géométrique de  $X$  est un morphisme  $x : s \rightarrow X$  de log schémas où  $s$  est un point log géométrique. Un voisinage két  $U$  de  $s$  dans  $X$  est un mor-

phisme  $s \rightarrow U$  de  $X$ -log schemes où  $U \rightarrow X$  est két. Alors si  $x$  est un log point géométrique de  $X$ , le foncteur  $F_x$  de  $X_{\text{két}}$  vers  $\text{Ens}$  défini par  $\mathcal{F} \mapsto \varinjlim_U \mathcal{F}(U)$  où  $U$  parcourt la catégorie filtrante des voisinages két de  $x$  est un point du topos  $X_{\text{két}}$  et n'importe quel point de ce topos est isomorphe à  $F_x$  pour un certain point log géométrique et ils forment un système conservatif.

On définit aussi la log stricte localisation  $X(x)$  comme la limite inverse des voisinages két de  $X$  dans la catégorie des log schémas saturés. Si  $x$  et  $y$  sont des points log géométriques de  $X$ , une *spécialisation (két)* de points log géométriques  $x \rightarrow y$  est un morphisme  $X(x) \rightarrow X(y)$  au-dessus de  $X$ .

Une spécialisation  $x \rightarrow y$  induit un morphisme canonique  $F_x \rightarrow F_y$  de foncteurs. Si on a une spécialisation des points topologiques sous-jacents  $x \rightarrow y$ , alors il existe au moins une spécialisation  $x \rightarrow y$  de points log géométriques.

Si  $X$  est connexe, pour tout point log géométrique  $x$  de  $X$ ,  $F_x$  induit un foncteur fondamental  $\text{KCov}(X) \rightarrow \text{fEns}$  de la catégorie galoisienne  $\text{KCov}(X)$ .

On note  $\pi_1^{\log}(X, x)$  le groupe profini des automorphismes de ce foncteur.

Les morphismes de log schémas fs  $f$  exacts tels que  $\mathring{f}$  soit propre, surjectif et de présentation finie, et les morphismes de log schémas fs  $f$  exacts tels que  $\mathring{f}$  soit surjectif, de présentation finie et universellement ouvert, sont de descente effective pour les revêtements két ([38, th. 3.2.25, cor. 3.2.21]).

Si  $X$  est un log schéma fs log régulier et si  $\mathbb{L}$  est inversible sur  $X$ , alors  $\text{KCov}(X)^{\mathbb{L}} \rightarrow \text{Cov}^{\text{alg}}(X_{\text{tr}})^{\mathbb{L}}$  est une équivalence de catégories ([21, th. 7.6]).

**Théorème 1.3.1** ([36, cor. 2.3]). *Soit  $S$  un schéma strictement local de point fermé  $s$ , et soit  $X$  un log schéma fs connexe tel que  $\mathring{X}$  soit propre sur  $S$ . Alors*

$$\text{KCov}(X) \rightarrow \text{KCov}(X_s)$$

*est une équivalence de catégories.*

*Si  $x$  est un point log géométrique de  $X_s$ ,*

$$\pi_1^{\log}(X_s, x) \rightarrow \pi_1^{\log}(X, x)$$

*est un isomorphisme*

Si  $q : X \rightarrow Y$  est kuh,  $q^* : Y_{\text{két}} \rightarrow X_{\text{két}}$  est une équivalence de catégories ([43, th. 0.1])

### 1.3.3 Morphismes saturés

L'article de référence sur le sujet est [40], malheureusement non publié.

Un morphisme de monoïdes fs  $P \rightarrow Q$  est *intègre* si, pour tout morphisme de monoïdes intègres  $P \rightarrow Q'$ , la somme amalgamée  $Q \oplus_P Q'$  (dans la catégorie des monoïdes) est encore intègre.

Un morphisme intègre de monoïdes saturés  $P \rightarrow Q$  est *saturé* si, pour tout morphisme de monoïdes fs  $P \rightarrow Q'$ , la somme amalgamée  $Q \oplus_P Q'$  (dans la catégorie des monoïdes) est encore fs.

Si  $f : P \rightarrow Q$  est intègre (resp. saturé) et  $F'$  est une face de  $Q$ ,  $\overline{F^{-1}P} \rightarrow \overline{F'^{-1}Q}$  est aussi intègre (resp. saturé), où  $F = f^{-1}(F')$ .

**Lemme 1.3.2.** *Si  $\phi : P \rightarrow Q$  est un morphisme intègre (resp. saturé) de monoïdes fs et  $F'$  est une face de  $Q$ , soit  $F = \phi^{-1}(F')$ . Alors  $F \rightarrow F'$  est aussi intègre (resp. saturé).*

*Démonstration.* Pour prouver que  $F \rightarrow F'$  est intègre, grâce à [35, prop. I.4.3.11], il faut et il suffit de prouver que si  $f'_1, f'_2 \in F'$  et  $f_1, f_2 \in F$  vérifient  $f'_1 \phi(f_1) = f'_2 \phi(f_2)$ , alors il existe  $g' \in F'$  et  $g_1, g_2 \in F$  tels que  $f'_1 = g' \phi(g_1)$  et  $f'_2 = g' \phi(g_2)$ . Mais il existe  $g' \in Q$  et  $g_1, g_2 \in P$  qui satisfont les propriétés voulues puisque  $P \rightarrow Q$  est intègre. Comme  $F'$  est une face de  $Q$ ,  $g', \phi(g_1), \phi(g_2)$  doivent être dans  $F'$ , et donc  $g_1$  et  $g_2$  sont dans  $F$ .

Un critère de T. Tsuji ([40, prop. 4.1]) dit qu'un morphisme intègre de monoïdes  $f : P_0 \rightarrow Q_0$  est saturé si et seulement si pour tous  $a \in P_0, b \in Q_0$  et tout nombre premier  $p$  tels que  $f(a)|b^p$ , il existe  $c \in P_0$  tel que  $a|c^p$  et  $f(c)|b$ . Soient  $a \in F, b \in F'$  et  $p$  un nombre premier tel que  $\phi(a)|b^p$ . Alors puisque  $\phi : P \rightarrow Q$  est saturé, il existe  $c \in P$  tel que  $a|c^p$  et  $f(c)|b$ . Mais  $f(c)|b$  implique que  $f(c) \in F'$ , donc  $c \in F$ .  $\square$

Un morphisme  $f : Y \rightarrow X$  de log schémas fs est *saturé* si pour tout point géométrique  $\bar{y}$  de  $Y$ ,  $\bar{M}_{X, f(\bar{y})} \rightarrow \bar{M}_{Y, \bar{y}}$  est saturé.

Si  $Y \rightarrow X$  est saturé et  $Z \rightarrow X$  est un morphisme de log schémas fs, alors le schéma sous-jacent à  $Z \times_X Y$  est  $\mathring{Z} \times_{\mathring{X}} \mathring{Y}$ .

Si  $P \rightarrow Q$  est un morphisme local et intègre (resp. saturé) de monoïdes fs et  $P$  est aigu, le morphisme  $\text{Spec } \mathbf{Z}[Q] \rightarrow \text{Spec } \mathbf{Z}[P]$  est plat (resp. séparable, *i.e.* plat à fibres géométriquement réduites, cf. [35, cor. 4.3.16] et [22, rem. 6.3.3]). Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme log lisse et  $\bar{x}$  un point géométrique de  $X$ . Localement sur  $Y$  pour la topologie étale, il existe une bonne carte  $Y \rightarrow \text{Spec } P$  en  $\bar{y}$ . Alors, grâce à [22, prop. A.3.1.1], étale localement en  $x$ , il existe une carte  $P \rightarrow Q$  de  $Y \rightarrow X$  telle que  $Y \rightarrow \text{Spec } \mathbf{Z}[Q] \times_{\mathbf{Z}[P]} X$  soit étale et  $X \rightarrow \text{Spec } Q$  est exact à  $x$ . Ainsi si  $f$  est intègre (resp. saturé),  $P \rightarrow Q$  est un morphisme intègre (resp. saturé) et local de monoïdes fs et  $P$  est aigu. Donc  $f$  est plat (resp. séparable).

Si  $P \rightarrow Q$  est un morphisme intègre de monoïdes fs, il existe un entier  $n$  tel que le changement de base fs  $P_n \rightarrow Q'$  de  $P \rightarrow Q$  le long de  $P \xrightarrow{n} P = P_n$  soit saturé ([22, th. A.4.2]).

De plus, si  $P \rightarrow Q$  se factorise à travers  $Q_0$  de manière à ce que  $P \rightarrow Q_0$  soit saturé et  $Q_0 \rightarrow Q$  soit  $\mathbb{L}$ -Kummer, on peut choisir pour  $n$  un  $\mathbb{L}$ -entier.

Ainsi, si  $Z'' \rightarrow Z'$  est un revêtement két et  $Z' \rightarrow Z$  est saturé log lisse et propre, alors pour tout log point géométrique  $z$  de  $Z$ , il existe un voisinage két  $U$  de  $z$  tel que  $Z''_U \rightarrow U$  soit saturé (et l'hypothèse de propreté peut être remplacée par la quasicompacité de  $Z''$  si  $Z$  est simplement un log point fs, c'est-à-dire son schéma sous-jacent est le spectre d'un corps).

## 1.4 Squelette d'un espace de Berkovich à réduction pluristable

Soit  $K$  un corps complet non archimédien et soit  $O_K$  son anneau d'entiers. Si  $\mathfrak{X}$  est un schéma formel localement de présentation finie sur  $O_K$ ,  $\mathfrak{X}_\eta$  sera la

fibre générique de  $\mathfrak{X}$  au sens de Berkovich ([6, section 1]).

Rappelons la définition d'un morphisme polystable de schémas formels :

**Définition 1.4.1** ([7, def. 1.2], [8, section 4.1]). Soit  $\phi : \mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{X}$  un morphisme de schémas formels localement de présentation finie.

- (i)  $\phi$  est *strictement polystable* si, pour tout point  $y \in \mathfrak{Y}$ , il existe un voisinage ouvert affine  $\mathfrak{X}' = \mathrm{Spf}(A)$  de  $x := \phi(y)$  et un voisinage ouvert  $\mathfrak{Y}' \subset \phi^{-1}(\mathfrak{X}')$  de  $x$  tel que le morphisme induit  $\mathfrak{Y}' \rightarrow \mathfrak{X}'$  se factorise à travers un morphisme étale  $\mathfrak{Y}' \rightarrow \mathrm{Spf}(B_0) \times_{\mathfrak{X}'} \cdots \times_{\mathfrak{X}'} \mathrm{Spf}(B_p)$  où chaque  $B_i$  est de la forme  $A\{T_0, \dots, T_{n_i}\}/(T_0 \cdots T_{n_i} - a_i)$  avec  $a \in A$  et  $n \geq 0$ .  
Si  $\mathfrak{X}$  est de type fini sur  $O_K$ , on dit que  $\phi$  est *non dégénéré* si l'on peut choisir  $X', Y'$  et  $(B_i, a_i)$  tels que  $\{x \in (\mathrm{Spf}(A)_\eta) \mid a_i(x) = 0\}$  soit nulle part dense.
- (ii)  $\phi$  est *polystable* si il existe un morphisme étale surjectif  $\mathfrak{Y}' \rightarrow \mathfrak{Y}$  tel que  $\mathfrak{Y}' \rightarrow \mathfrak{X}$  soit strictement polystable. Si  $\mathfrak{X}$  est de type fini sur  $O_K$ ,  $\phi$  est alors dit *non dégénéré* si l'on peut choisir  $\mathfrak{Y}'$  tel que  $\mathfrak{Y}' \rightarrow \mathfrak{X}$  soit non dégénéré.

Une *fibration polystable* (resp. *non dégénérée*) de longueur  $l$  au-dessus de  $\mathfrak{S}$  est une suite de  $l$  morphismes polystables (resp. non dégénérés)  $\underline{\mathfrak{X}} = (\mathfrak{X}_l \rightarrow \cdots \rightarrow \mathfrak{X}_1 \rightarrow \mathfrak{S})$ .

On note  $K\text{-}\mathcal{P}stf_l^{\text{ét}}$  la catégorie des fibrations polystables de longueur  $l$  sur  $O_K$ , où un morphisme  $\underline{\mathfrak{X}} \rightarrow \underline{\mathfrak{Y}}$  est une collection de morphismes étales  $(\mathfrak{X}_i \rightarrow \mathfrak{Y}_i)_{1 \leq i \leq l}$  qui satisfait aux hypothèses de commutation évidentes.

On note  $\mathcal{P}stf_l^{\text{ét}}$  la catégorie des couples  $(\underline{\mathfrak{X}}, K_1)$  où  $K_1$  est un corps complet non archimédien et  $\underline{\mathfrak{X}}$  est une fibration polystable sur  $O_{K_1}$ , et un morphisme  $(\underline{\mathfrak{X}}, K_1) \rightarrow (\underline{\mathfrak{Y}}, K_2)$  est un couple  $(\phi, \psi)$  où  $\phi$  est une extension isométrique  $K_2 \rightarrow K_1$  et  $\psi$  est un morphisme  $\underline{\mathfrak{X}} \rightarrow \underline{\mathfrak{Y}} \otimes_{O_{K_2}} O_{K_1}$  dans  $K_1\text{-}\mathcal{P}stf_l^{\text{ét}}$ .

Soit  $X$  un schéma localement de type fini sur un corps  $k$ .

Le lieu normal d'un schéma réduit, localement de type fini sur un corps, en est un ouvert dense. Définissons par récurrence  $X^{(0)} = X^{\text{red}}$ ,  $X^{(i+1)} = X^{(i)} \setminus \text{Norm}(X^{(i)})$ . Les composantes irréductibles de  $X^{(i)} \setminus X^{(i+1)}$  sont appelées les *strates* de  $X$  (de rang  $i$ ). Cela fournit une partition de  $X$ . L'ensemble des points génériques des strates de  $X$  est noté  $\text{Str}(X)$  (il est en bijection naturelle avec l'ensemble des strates de  $X$ ).

Berkovich définit une autre filtration  $X = X_{(0)} \subset X_{(1)} \subset \cdots$  de la manière suivante :  $X_{(i+1)}$  est le sous-ensemble fermé des points contenu dans au moins deux composantes irréductibles de  $X_{(i)}$ .

On dit que  $X$  est *quasinormal* si, pour tout  $i$ , toute composante connexe de  $X_{(i)}$ , muni de la structure de sous-schéma réduit, est normale (cette propriété est locale pour la topologie de Zariski et reste vraie après composition avec un morphisme étale). Si  $X$  est quasinormal, alors  $X_{(i)} = X^{(i)}$ , et  $X$  est quasinormal si et seulement si l'adhérence de toute strate est normale.

L'ensemble  $\text{Str}(X)$  est naturellement ordonné :  $x \leq y$  si et seulement si  $y \in \overline{\{x\}}$ .

Berkovich définit les *ensembles polysimpliciaux* dans [7, section 3] comme suit.

Si  $n$  est un entier, posons  $[n] := \{0, 1, \dots, n\}$ .

Pour un  $p$ -uplet  $\mathbf{n} = (n_0, \dots, n_p)$  avec soit  $p = n_0 = 0$  soit  $n_i \geq 1$  pour tout  $i$ ,



posons  $[\mathbf{n}] := [n_0] \times \cdots \times [n_p]$  et  $w(\mathbf{n}) := p$ .  $[\mathbf{n}]$  est un espace métrique pour la distance  $d((i_0, \dots, i_p), (j_0, \dots, j_p)) = \#\{k \mid i_k \neq j_k\}$ .

Soit  $\mathbf{\Lambda}$  la catégorie dont les objets sont  $[\mathbf{n}]$  et les morphismes sont les fonctions  $[\mathbf{m}] \rightarrow [\mathbf{n}]$  associées à un triplet  $(J, f, \alpha)$ , où :

- $J$  est un sous-ensemble de  $[w(\mathbf{m})]$  supposé vide si  $[\mathbf{m}] = [0]$ ,
- $f$  est une fonction injective  $J \rightarrow [w(\mathbf{n})]$ ,
- $\alpha$  est une famille  $\{\alpha_l\}_{0 \leq l \leq p}$ , où  $\alpha_l$  est une fonction injective  $[m_{f^{-1}(l)}] \rightarrow [n_l]$  si  $l \in \text{Im}(f)$ , et  $\alpha_l$  est une fonction  $[0] \rightarrow [n_l]$  sinon.

La fonction  $\gamma : [\mathbf{m}] \rightarrow [\mathbf{n}]$  associée à  $(J, f, \alpha)$  envoie alors  $\mathbf{j} = (j_0, \dots, j_{w(\mathbf{m})}) \in [m]$  en  $\mathbf{i} = (i_0, \dots, i_{w(\mathbf{n})})$  avec  $i_l = \alpha_l(j_{f^{-1}(l)})$  pour  $l \in \text{Im}(f)$ , et  $i_l = \alpha_l(0)$  sinon.

Un ensemble polysimplicial  $C$  est un foncteur  $\mathbf{\Lambda}^{\text{op}} \rightarrow \text{Ens}$ . On notera  $C_{\mathbf{n}}$  l'image de  $[\mathbf{n}]$  par ce foncteur. Les ensembles polysimpliciaux forment une catégorie notée  $\mathbf{\Lambda}^\circ \text{Ens}$ .

$\mathbf{\Lambda}$  est une sous-catégorie pleine de  $\mathbf{\Lambda}^\circ \text{Ens}$  grâce au foncteur de Yoneda. Si  $C$  est un ensemble polysimplicial, la catégorie  $\mathbf{\Lambda}/C$  des *polysimplexes* de  $C$  est la catégorie dont les objets sont les morphismes  $[\mathbf{n}] \rightarrow C$  dans  $\mathbf{\Lambda}^\circ \text{Ens}$  et les morphismes de  $[\mathbf{n}] \rightarrow C$  vers  $[\mathbf{m}] \rightarrow C$  sont des morphismes  $[\mathbf{n}] \rightarrow [\mathbf{m}]$  qui rendent le triangle commutatif.

Un polysimplexe  $x$  d'un ensemble polysimplicial  $C$  est *dégénéré* si il existe un morphisme surjectif  $f$  de  $\mathbf{\Lambda}$ , qui n'est pas un isomorphisme, tel que  $x$  soit l'image par  $f$  d'un polysimplexe de  $C$ . Soit  $C_{\mathbf{n}}^{\text{nd}}$  le sous-ensembles des polysimplexes non dégénérés de  $C_{\mathbf{n}}$ .

Grâce à un analogue du lemme d'Eilenberg-Zilber pour les ensembles polysimpliciaux ([7, lem. 3.2]), un morphisme  $C' \rightarrow C$  est bijectif si et seulement si il envoie les polysimplexes non dégénérés sur les polysimplexes non dégénérés et  $(C')_{\mathbf{n}}^{\text{nd}} \rightarrow C_{\mathbf{n}}^{\text{nd}}$  est bijectif pour tout  $\mathbf{n}$ .

Il y a un foncteur

$$O : \mathbf{\Lambda}^\circ \text{Ens} \rightarrow \text{Poset}$$

où  $O(C)$  est l'ensemble ordonné associé à  $\text{Ob}(\mathbf{\Lambda}/C)$  muni du préordre  $x \leq y$  si et seulement si il existe un morphisme  $x \rightarrow y$  dans  $\mathbf{\Lambda}/C$ . L'ensemble sous-jacent à  $O(C)$  coïncide avec l'ensemble des classes d'équivalences de polysimplexes non dégénérés de  $C$ .

Nous dirons qu'un ensemble polysimplicial  $C$  est *intérieurement libre* si  $\text{Aut}(\mathbf{n})$  agit librement sur  $C_{\mathbf{n}}^{\text{nd}}$ . Si  $C_1 \rightarrow C_2$  est un morphisme d'ensembles polysimpliciaux qui envoie les polysimplexes non dégénérés sur les polysimplexes non dégénérés tels que  $O(C_1) \rightarrow O(C_2)$  soit un isomorphisme et  $C_2$  soit intérieurement libre, alors  $C_1 \rightarrow C_2$  est un isomorphisme.

Berkovich définit aussi une *catégorie polysimpliciale stricte*  $\mathbf{\Lambda}$  dont les objets sont ceux de  $\mathbf{\Lambda}$ , mais avec seulement les morphismes injectifs. Le foncteur  $\mathbf{\Lambda} \rightarrow \mathbf{\Lambda}^\circ \text{Ens}$  s'étend en un foncteur

$$\mathbf{\Lambda}^\circ \text{Ens} \rightarrow \mathbf{\Lambda}^\circ \text{Ens}$$

qui commute aux limites inductives (les objets de  $\mathbf{\Lambda}^\circ \text{Ens}$  sont les *ensembles strictement polysimpliciaux*).

Berkovich construit alors un foncteur  $\Sigma : \mathbf{\Lambda} \rightarrow \mathcal{Kc}$  vers la catégorie des espaces de Kelley, c'est-à-dire les espaces topologiques  $X$  pour lesquels un sous-ensemble est fermé dès que son intersection avec tout compact est compacte. Ce foncteur envoie  $[\mathbf{n}]$  en  $\Sigma_{\mathbf{n}} = \{(u_{il})_{0 \leq i \leq p, 0 \leq l \leq n_i} \in [0, 1]^{[\mathbf{n}]} \mid \sum_l u_{il} = 1\}$  (si

$\mathbf{n} = (n_0, \dots, n_p)$ ,  $\Sigma_{\mathbf{n}}$  est le produit des simplexes standards de dimensions  $n_0, \dots, n_p$ , et si  $\gamma$  est un morphisme associé à  $(J, f, \alpha)$ ,  $\Sigma(\gamma)$  envoie  $\mathbf{u} = (u_{jk})$  vers  $\mathbf{u}' = (u'_{il})$  défini comme suit : si  $[\mathbf{m}] \neq [0]$  et  $i \notin \text{Im}(f)$  ou  $[\mathbf{m}] = [0]$  alors  $u'_{il} = 1$  pour  $l = \alpha_i(0)$  et  $u'_{il} = 0$  sinon ; si  $[\mathbf{m}] \neq [0]$  et  $i \in \text{Im}(f)$ , alors  $u'_{il} = u_{f^{-1}(i), \alpha_i^{-1}(l)}$  pour  $l \in \text{Im}(\alpha_i)$  et  $u'_{il} = 0$  sinon.  
En étendant  $\Sigma$  pour que  $|\cdot|$  commute aux limites inductives,  $\Sigma$  induit un foncteur, la *réalisation géométrique*,

$$|\cdot| : \Lambda^\circ \text{Ens} \rightarrow \mathcal{K}e.$$

On a aussi un bifoncteur

$$\square : \Lambda^\circ \text{Ens} \times \Lambda^\circ \text{Ens} \rightarrow \Lambda^\circ \text{Ens}$$

qui commute aux limites inductives et qui vérifie  $[(n_0, \dots, n_p)]\square[(n'_0, \dots, n'_{p'})] = [(n_0, \dots, n_p, n'_0, \dots, n'_{p'})]$ . Ainsi  $|C \square C'| = |C| \times |C'|$  (où le produit de droite est le produit dans la catégorie des espaces de Kelley).

Si  $X$  est strictement polystable sur  $k$  et  $x \in \text{Str}(X)$ , on note  $\text{Irr}(X, x)$  l'espace métrique des composantes irréductibles de  $X$  passant par  $x$ , muni de la distance  $d(X_1, X_2) = \text{codim}_x(X_1 \cap X_2)$ . Il existe alors un  $n$ -uplet  $\mathbf{n}$  tel que  $\text{Irr}(X, x)$  soit isométriquement en bijection avec  $[\mathbf{n}]$ , et si  $[\mathbf{m}] \rightarrow [\mathbf{n}]$  est isométrique, il existe un unique  $y \in \text{Str}(X)$  avec  $y \leq x$  et une unique bijection isométrique  $[\mathbf{m}] \rightarrow \text{Irr}(X, y)$  tels que

$$\begin{array}{ccc} [\mathbf{n}] & \rightarrow & \text{Irr}(X, x) \\ \uparrow & & \uparrow \\ [\mathbf{m}] & \rightarrow & \text{Irr}(X, y) \end{array}$$

commute.

Le foncteur qui à  $[\mathbf{n}]$  associe l'ensemble des couples  $(x, \mu)$ , où  $x \in \text{Str}(X)$  et  $\mu$  est une bijection isométrique  $[\mathbf{n}] \rightarrow \text{Irr}(X, x)$ , définit un ensemble polysimplicial strict  $C(X)$  (et donc un ensemble polysimplicial  $C(X)$ ).

On a un isomorphisme fonctoriel d'ensembles ordonnés  $O(C(X)) \simeq \text{Str}(X)$ .

**Proposition 1.4.1** ([7, prop. 3.14]). *On a un foncteur  $C : \mathcal{P}st^{\text{sm}} \rightarrow \Lambda^\circ \text{Ens}$  tel que  $C(X)$  est le complexe qu'on vient de définir si  $X$  est strictement polystable et pour tout morphisme étale surjectif  $X' \rightarrow X$  :*

$$C(X) = \text{Coker}(C(X' \times_X X') \rightrightarrows C(X')).$$

Ici Coker désigne simplement la limite inductive du diagramme (les catégories  $\Lambda^\circ \text{Ens}$  et  $\Lambda^\circ \text{Ens}$  admettent toutes les limites inductives en tant que catégories de préfaisceaux).

Ce foncteur  $C$  s'étend aux filtrations strictement polystables sur  $K$  de longueur  $l$ .

Supposons que l'on a construit  $C$  pour les fibrations strictement polystables de longueur  $l-1$  de manière à ce que  $O(C(\underline{X})) = \text{Str}(X_{l-1})$ . Soit  $\underline{X} : X_l \rightarrow X_{l-1} \rightarrow \dots \rightarrow \text{Spec } k$  une fibration strictement polystable, et soit  $\underline{X}_{l-1} : X_{l-1} \rightarrow \dots \rightarrow \text{Spec } k$ . Alors pour tout  $x' \leq x \in \text{Str}(X_{l-1})$ , on a le lemme suivant :

**Lemme 1.4.2** ([7, cor. 6.2]). *Il existe un foncteur canonique de cospécialisation  $C(X_{l,x}) \rightarrow C(X_{l,x'})$  et si  $x'' \leq x' \leq x$ , le foncteur  $C(X_{l,x}) \rightarrow C(X_{l,x''})$  coïncide avec la composition  $C(X_{l,x}) \rightarrow C(X_{l,x'}) \rightarrow C(X_{l,x''})$ .*

Ceci s'étend en un foncteur

$$D : (\mathbf{A}/(C(\underline{X}_{l-1})))^{\text{op}} \rightarrow \text{Str}(X_{l-1})^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{A}^\circ \text{Ens}.$$

Berkovich définit alors un ensemble polysimplicial (où l'on a posé  $C = C(\underline{X}_{l-1})$ ) :

$$C(\underline{X}) = C \square D = \text{Coker} \left( \coprod_{N_1(\mathbf{A}/C)} \mathbf{A}[\mathbf{n}_y] \square D_x \rightrightarrows \coprod_{N_0(\mathbf{A}/C)} \mathbf{A}[\mathbf{n}_x] \square D_x \right).$$

Cette construction s'étend aux fibrations polystables :

**Proposition 1.4.3** ([7, prop 6.9]). *Il existe un foncteur  $C : \mathcal{P}st_l^{\text{tps}} \rightarrow \mathbf{A}^\circ \text{Ens}$  tel que :*

(i) *pour tout morphisme étale surjectif de fibrations polystables  $X' \rightarrow X$  :*

$$C(X) = \text{Coker}(C(X' \times_X X') \rightrightarrows C(X')).$$

(ii)  $O(C(\underline{X})) \simeq \text{Str}(X)$ .

Si  $k$  est algébriquement clos, le complexe polysimplicial d'une fibration polystable est invariant par changement de corps de base :

**Proposition 1.4.4** ([7, prop. 6.10]). *Si  $\underline{\mathfrak{X}}$  est une fibration polystable sur  $k$ , alors pour toute extension de corps  $k \rightarrow k'$ ,  $C(X_{k'}) \rightarrow C(X)$  est un isomorphisme.*

Berkovich associe à une fibration polystable  $\underline{\mathfrak{X}} = (\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_l \rightarrow \mathfrak{X}_{l-1} \rightarrow \cdots \rightarrow \text{Spf}(O_K))$  un sous-ensemble de la fibre générique  $\mathfrak{X}_\eta$  de  $\mathfrak{X}$ , le *squelette*  $S(\underline{\mathfrak{X}})$  de  $\underline{\mathfrak{X}}$ , qui est canoniquement homéomorphe à  $|C(\mathfrak{X}_s)|$  (voir [7, th. 8.2]), et tel que  $\mathfrak{X}_\eta$  se rétracte par déformation forte et propre sur  $S(\underline{\mathfrak{X}})$ .

En fait, quand  $\underline{\mathfrak{X}}$  est non dégénéré — par exemple génériquement lisse (nous utiliserons seulement les résultats de Berkovich à de telles fibrations) — le squelette de  $\underline{\mathfrak{X}}$  dépend seulement de  $\mathfrak{X}$  d'après [8, prop. 4.3.1.(ii)]. Un schéma formel  $\mathfrak{X}$  sur  $O_K$  pour lequel il existe une telle fibration polystable est alors dit *pluristable*, et on notera simplement  $S(\mathfrak{X})$  son squelette.

Dans ce cas, [8, prop. 4.3.1.(ii)] donne une description de  $S(\mathfrak{X})$ , qui est indépendante de la fibration. Pour  $x, y \in \mathfrak{X}_\eta$ , on pose  $x \preceq y$  si pour tout morphisme étale  $\mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}$  et tout  $x'$  au-dessus de  $x$ , il existe  $y'$  au-dessus de  $y$  tel que pour tout  $f \in O(\mathfrak{X}_\eta)$ ,  $|f(x')| \leq |f(y')|$  ( $\preceq$  est un ordre sur  $\mathfrak{X}_\eta$ ). Alors  $S(\mathfrak{X})$  est simplement l'ensemble des points maximaux de  $\mathfrak{X}_\eta$  pour  $\preceq$ .

La rétraction à  $S(\underline{\mathfrak{X}})$  commute aux morphismes étales :

**Théorème 1.4.5** ([7, th. 8.1]). *On peut construire, pour toute fibration polystable  $\underline{\mathfrak{X}} = (\mathfrak{X}_l \xrightarrow{f_{l-1}^{-1}} \cdots \xrightarrow{f_1} \mathfrak{X}_1 \rightarrow \text{Spf}(O_K))$ , une rétraction par déformation forte et propre  $\Phi^l : \mathfrak{X}_{l,\eta} \times [0, l] \rightarrow \mathfrak{X}_{l,\eta}$  de  $\mathfrak{X}_{l,\eta}$  sur le squelette  $S(\underline{\mathfrak{X}})$  de  $\underline{\mathfrak{X}}$  tel que, en notant  $x_t = \Phi^l(x, t)$ , on ait :*

(i)  $S(\underline{\mathfrak{X}}) = \bigcup_{x \in S(\mathfrak{X}_{l-1})} S(\mathfrak{X}_{l,x})$  (union disjointe d'ensembles), où  $\mathfrak{X}_{l-1} = (\mathfrak{X}_{l-1} \rightarrow \cdots \rightarrow \text{Spf}(O_K))$  ;

(ii)  $(x_t)_{t'} = x_{\max(t, t')}$

(iii) Si  $\phi : \mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{X}$  est un morphisme de fibrations dans  $\mathcal{P}st f_l^{\text{ét}}$ , on a  $\phi_{l,\eta}(y_t) = \phi_{l,\eta}(y)_t$  pour tout  $y \in \mathfrak{Y}_{l,\eta}$ .

Décrivons plus précisément la déformation.

Si  $\mathfrak{X} = \text{Spf } O_K\{P\}/(p_i - z_i)$  où  $P$  est isomorphe à  $\oplus_{0 \leq i \leq p} \mathbf{N}^{n_i+1}$ ,  $p_i = (1, \dots, 1) \in \mathbf{N}^{n_i+1}$  et  $z_i \in O_K$ , soit  $\mathfrak{G}_m$  le groupe multiplicatif  $\text{Spf } O_K\{T, \frac{1}{T}\}$  sur  $O_K$ , notons pour tout  $n$  par  $\mathfrak{G}_m^{(n)}$  le noyau de la multiplication  $\mathfrak{G}_m^{n+1} \rightarrow \mathfrak{G}_m$  et soit  $\mathfrak{G}$  le complété formel de l'identité dans  $\prod_i \mathfrak{G}_m^{(n_i)}$  (c'est un groupe formel). Alors  $\mathfrak{G}$  agit sur  $\mathfrak{X}$ .  $G = \mathfrak{G}_\eta$  agit alors sur  $\mathfrak{X}_\eta$ .  $G$  a un sous groupe canonique  $G_t$  pour  $t \in [0, 1]$  défini par les inégalités  $|T_{ij} - 1| \leq t$  où  $T_{ij}$  sont les coordonnées dans  $G$ , qui est un quotient de  $\prod_i \mathbf{G}_m^{n_i+1}$ .  $G_t$  a un point maximal  $g_t$ .

Alors pour  $x \in X$ ,  $x_t = g_t * x$  définit la déformation forte (où  $*$  est la multiplication définie dans [4, § 5.2]).

Si  $\mathfrak{X}$  est étale sur  $\text{Spf } O_K\{P\}/(p_i - z_i)$ , l'action de  $\mathfrak{G}$  s'étend de façon unique sur  $X$ , et  $x_t$  encore définit par  $g_t * x$ . Pour tout  $\mathfrak{X}$  polystable sur  $O_K$ , on a ainsi défini la déformation localement sur  $\mathfrak{X}_\eta^{\text{an}}$  pour la topologie quasi-étale, et Berkovich vérifie qu'elle se descend bien en une déformation de  $\mathfrak{X}$ .

Pour une fibration polystable  $\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}_{l-1} \rightarrow \dots \rightarrow \text{Spf } O_K$ , on suppose d'abord  $\mathfrak{X} = \text{Spf } B \rightarrow \mathfrak{X}_{l-1} = \text{Spf } A$  avec  $B = A\{P\}/(p_i - a_i)$  (on appellera un tel morphisme polystable *standard*), on déforme d'abord sur  $S(\mathfrak{X}/\mathfrak{X}_{l-1})$  fibre par fibre (les fibres étant strictement polystables). L'image obtenue s'identifie avec  $S = \{(x, \mathbf{r}_0, \dots, \mathbf{r}_p) \in \mathfrak{X}_{l-1,\eta}, r_{i0} \dots r_{in_i} = |a_i(x)|\}$ , on a alors une homotopie  $\Psi : S \times [0, 1] \rightarrow S$  définie par  $\Psi(x, \mathbf{r}_0, \dots, \mathbf{r}_p, t) = (x_t, \psi_{n_0}(\mathbf{r}_0, |a_0(x_t)|), \dots, \psi_{n_p}(\mathbf{r}_p, |a_p(x_t)|))$ , où  $\psi_n$  est une déformation forte de  $[0, 1]^{n+1}$  sur  $(1, \dots, 1) \in [0, 1]^{n+1}$  définie par Berkovich (nous utiliserons seulement le fait que  $\psi_n(r_i, t)_k^\lambda = \psi_n(r_i^\lambda, t^\lambda)_k$  pour tout  $\lambda \in \mathbf{R}^{*+}$  et tout  $k \in [[0, n]]$ ), et  $x_t$  est défini par la déformation forte de  $\mathfrak{X}_{l-1,\eta}$ .

Si  $\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}' \rightarrow \mathfrak{X}_{l-1}$  est la composée géométriquement élémentaire d'un morphisme étale et d'un morphisme polystable standard,  $S(\mathfrak{X}/\mathfrak{X}_{l-1}) \rightarrow S(\mathfrak{X}'/\mathfrak{X}_{l-1})$  est un isomorphisme, et donc on déforme  $\mathfrak{X}'$  fibre par fibre sur  $S(\mathfrak{X}/\mathfrak{X}_{l-1})$ , puis on fait la même déformation que pour  $S(\mathfrak{X}'/\mathfrak{X}_{l-1})$ . Pour une fibration polystable quelconque  $X \rightarrow \dots \rightarrow O_K$ , on a défini la déformation localement pour la topologie quasi-étale de  $\mathfrak{X}_\eta$ , et Berkovich vérifie que l'on peut la descendre en une déformation de  $X$ .

Berkovich déduit de (1.4.5.(ii)) le corollaire suivant :

**Corollaire 1.4.6** ([7, cor. 8.5]). *Soit  $K'$  une extension galoisienne finie de  $K$  et soit  $\mathfrak{X}$  une fibration polystable sur  $O_{K'}$  avec une fibre générique  $\mathfrak{X}_{l,\eta}$  normale. Supposons qu'on ait une action d'un groupe fini  $G$  sur  $\mathfrak{X}$  au dessus de  $O_K$  et un ouvert dense de Zariski  $U$  de  $\mathfrak{X}_{l,\eta}$  stable par  $G$ . Alors il existe une rétraction par déformation forte de  $G \backslash U$  sur un fermé homéomorphe à  $G \backslash |C(\mathfrak{X})|$ .*

Plus précisément, dans ce corollaire, le fermé en question est l'image de  $S(\mathfrak{X})$  (qui est  $G$ -équivariant et contenu dans  $U$ ) par  $U \rightarrow G \backslash U$ .

Le théorème 1.4.5 implique aussi que le squelette est fonctoriel dans le cas pluristable :

**Proposition 1.4.7** ([8, prop. 4.3.2.(i)]). *Si  $\phi : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$  est un morphisme pluristable entre schémas formels pluristables non dégénérés de  $O_K$ ,  $\phi_\eta(S(\mathfrak{X})) \subset S(\mathfrak{Y})$ .*

Plus précisément, d'après la construction de  $S$ , on a  $S(\mathfrak{Y}) = \bigcup_{x \in S(\mathfrak{x})} S(\mathfrak{Y}_x)$ .

En vue d'utiliser la description précédente de l'espace de Berkovich d'un schéma pluristable sur  $O_K$  pour comprendre la topologie d'un schéma lisse sur  $k$ , nous aurons besoin du résultat de de Jong sur l'existence d'altérations par de tels schémas pluristables sur  $O_K$ .

Plus précisément nous utiliserons la conséquence suivante des résultats de de Jong donnée par Berkovich (comme nous supposerons  $K$  algébriquement clos de caractéristique 0, nous simplifierons l'énoncé de Berkovich) :

**Lemme 1.4.8.** ([7, lem. 9.2]) *Supposons  $K$  algébriquement clos de caractéristique nulle, soit  $X$  un schéma intègre propre plat et de présentation finie sur  $O_K$ , de fibre générique irréductible de dimension  $l$ . Alors il existe :*

- (a) *une fibration polystable  $\underline{X}' = (X'_l \rightarrow \cdots \rightarrow X'_0 = \text{Spec } O_K)$ , où tous les morphismes ont des fibres génériques lisses et géométriquement irréductibles ;*
- (b) *une action d'un groupe fini  $G$  sur  $\underline{X}'$  au-dessus de  $O_K$ ,*
- (c) *un morphisme dominant  $G$ -équivariant  $\phi : X'_l \rightarrow X$  au-dessus de  $O_K$ , dont la fibre générique est génériquement étale galoisien de groupe  $G$ .*

## Chapitre 2

# Quelques propriétés du groupe fondamental tempéré

Dans ce chapitre, nous prouvons pour le groupe fondamental tempéré certains résultats qui sont classiques pour le groupe fondamental profini. Ainsi nous montrerons la localité des revêtements tempérés pour la topologie étale (mais seulement dans le cas des courbes compactes), l'invariance birationnelle du groupe fondamental tempéré des variétés propres et lisses, l'invariance par extension isométrique algébriquement close du corps de base, la formule de Künneth et l'isomorphisme entre l'abélianisé du groupe fondamental tempéré d'une courbe et le groupe fondamental tempéré de sa jacobienne.

### 2.1 Localité des revêtements tempérés des courbes

Dans ce paragraphe, nous nous intéresserons au caractère local de la propriété d'être un revêtement tempéré. Il découle directement de la définition des revêtements tempérés qu'un revêtement étale fini est un morphisme de descente effective pour les revêtements tempérés. En revanche, la définition des revêtements tempérés n'est pas locale pour la topologie de Berkovich. Par exemple, le logarithme induit un revêtement étale de  $\mathbf{A}_{\mathbf{C}_p}^1$  qui est tempéré au-dessus de tous les ouverts précompacts (c'est-à-dire d'adhérence compacte), mais qui n'est pas lui-même tempéré.

Plus précisément, pour tout entier  $m \in \mathbf{N}$ , l'image inversedu disque ouvert  $\mathbf{D}_m$  de centre 0 et de rayon  $|p|^{-m+\frac{1}{p-1}}$  est une union disjointe

$$\coprod_{\zeta \in \mu_{p^\infty}} \{q \in \mathbf{D}(1, 1^-) \mid |\zeta q^{p^m} - 1| < 1\}$$

et chaque composante est finie étale sur  $\mathbf{D}_m$  ([2, ex. III.1.2.6.(i)]). Par contre le revêtement n'est pas tempéré puisque  $\pi_1^{\text{temp}}(\mathbf{A}^1)$  est trivial.

Nous verrons ici qu'au-dessus d'un bon espace analytique compact de dimension 1 (par exemple une courbe projective ou une courbe affinoïde), la notion de revêtement tempéré est locale pour la topologie étale de Berkovich. Ainsi dans ce

cas, les notions de revêtement tempéré et de faisceau localement constant pour la topologie étale coïncident.

Comme application, nous en déduirons qu'un revêtement tempéré d'une courbe algébrique qui est scindé au-dessus de tous les sommets du squelette de la courbe est un revêtement topologique.

Si  $\overline{X}$  est un bon espace analytique de dimension 1 et  $D$  est un ensemble localement fini de points fermé pour la topologie de Zariski, un revêtement ramifié de  $(\overline{X}, D)$  sera un morphisme  $Y \rightarrow X$  tel que il existe un recouvrement ouvert  $(U_i)$  de  $X$  tel que  $Y_{U_i} \rightarrow U_i$  soit une somme directe de revêtements finis non ramifiés hors de  $D \cap U_i$  et kummérien au voisinage de tout point de  $D$ .

**Proposition 2.1.1.** *Soit  $\overline{X}$  un bon espace analytique compact de dimension 1, soit  $D$  un ensemble fini de points fermés pour la topologie de Zariski et soit  $X = \overline{X} \setminus D$ .*

*Soit  $\overline{Y} \rightarrow \overline{X}$  un revêtement ramifié de  $(\overline{X}, D)$  qui est un  $G$ -torseur (c'est-à-dire  $Y \rightarrow X$  est galoisien mais pas nécessairement connexe) pour un certain groupe  $G$ . Alors  $Y = \overline{Y}_X \rightarrow X$  est tempéré.*

*Plus généralement, tout revêtement ramifié  $\overline{Y} \rightarrow \overline{X}$  de  $(\overline{X}, D)$  tel qu'il existe  $Z \rightarrow \overline{X}$  galoisien dominant toute composante connexe de  $\overline{Y}$  est tempéré au-dessus de  $X$ .*

*Démonstration.* Il existe un recouvrement ouvert  $(V_i)_{i \in I}$  de  $\overline{X}$  tel que  $Y_{V_i} = \coprod_j U_{ij}$  où  $U_{ij}$  est un revêtement fini de  $V_i$ .

Comme  $X$  est de dimension 1, quitte à raffiner le recouvrement  $(V_i)$ , on peut supposer que  $V_{ijk} := V_i \cap V_j \cap V_k = \emptyset$  pour  $i, j, k$  deux à deux distincts ([4, cor. 3.2.8]).

Comme tout bon espace analytique,  $V_i$  est localement connexe ([4, cor. 2.2.8]), et quitte à remplacer  $V_i$  par l'ensemble de ses composantes connexes, on peut supposer de plus les  $V_i$  connexes (le nouveau recouvrement vérifie bien encore la propriété précédente). Comme  $\overline{X}$  est compact, on peut supposer de plus  $I$  fini.

Pour  $i \in I$ , soit  $U_{i0}$  une composante connexe de  $Y_{V_i}$  : c'est un revêtement fini galoisien de  $V_i$ , et toutes les composantes connexes de  $Y_{V_i}$  sont (non canoniquement) isomorphes à  $U_{i0}$ . Soit  $n_i$  le cardinal des fibres géométriques de  $U_{i0}$ , et posons  $n := \prod_{i \in I} n_i$ .

Soit  $S_i$  l'union disjointe de  $n/n_i$  copies de  $U_{i0}$ . Montrons qu'il existe un revêtement  $S$  de  $X$  dont la restriction à  $V_i$  est isomorphe à  $S_i$ . Pour cela il suffit, pour tout  $i \neq j$ , de construire un  $V_{ij}$ -isomorphisme entre  $S_{i|V_{ij}}$  et  $S_{j|V_{ij}}$ , où  $V_{ij} := V_i \cap V_j$  (puisque  $V_{ijk}$  est vide, il n'y a pas de conditions de cocycle à vérifier).

Comme  $V_{ij}$  est localement connexe, il suffit de construire un tel isomorphisme au-dessus de toute composante connexe de  $V_{ij}$ .

Soit  $Z$  une telle composante connexe. Les composantes connexes de  $Y_Z$  sont toutes isomorphes entre elles (non canoniquement). Soit  $U_Z$  une telle composante connexe, et soit  $n_Z$  le cardinal des fibres géométriques de  $U_Z \rightarrow Z$  (elles ont toutes même cardinal). Alors  $U_{i0|Z}$  est union disjointe de composantes connexes de  $Y_Z$ , et donc est isomorphe à une union disjointe de copies de  $U_Z$  (plus précisément  $n_i/n_Z$  copies). Donc  $S_{i|Z}$  est isomorphe à une union disjointe de  $n/n_Z$  copies de  $U_Z$ . On a le même résultat pour  $S_{j|Z}$ . Il existe donc effectivement un

isomorphisme entre  $S_{i|Z}$  et  $S_{j|Z}$ , ce qui permet de construire  $S$  ayant la propriété voulue. Mais  $Y_{S_{i,X}} \rightarrow S_{i,X}$  est scindé, donc  $Y_{S_X} \rightarrow S_X$  est un revêtement topologique.  $\square$

Pour  $D$  vide, on obtient que tout revêtement étale galoisien de  $\overline{X}$  est tempéré.

**Corollaire 2.1.2.** *Soit  $X$  un bon espace analytique compact de dimension 1. Alors, la catégorie des revêtements tempérés de  $X$  est canoniquement équivalente à la catégorie des faisceaux localement constants sur le site étale  $X_{\text{ét}}$ .*

*Démonstration.* De manière générale (sans hypothèse sur  $X$ ), l'objet de  $\tilde{X}_{\text{ét}}$  associé à un revêtement tempéré est clairement localement constant pour la topologie étale (il est trivialisé par un recouvrement ouvert d'un revêtement fini). D'où un foncteur pleinement fidèle de la catégorie  $\text{Cov}^{\text{temp}}(X)$  vers la catégorie  $\text{lcs}(X_{\text{ét}})$  des objets localement constants de  $X_{\text{ét}}$ .

En outre, un faisceau localement constant sur  $X_{\text{ét}}$  est représentable par un revêtement étale grâce à [11, lem. 2.3], ce qui fait de la catégorie des faisceaux étales localement constants de  $X$  une sous-catégorie pleine de la catégorie des revêtements étales.

Revenons à notre cas. On peut supposer  $X$  connexe.

Comme  $\text{lcs}(X_{\text{ét}})$  est engendrée par les objets galoisiens (car le topos étale de  $X$  est localement connexe), tout faisceau localement constant est tempéré d'après 2.1.1.  $\square$

On en déduit en particulier des résultats de type Van Kampen :

**Corollaire 2.1.3.** *Soit  $X$  un bon espace analytique compact de dimension 1. Soit  $U_i$  un recouvrement étale de  $X$ . Alors  $\coprod U_i \rightarrow X$  est de descente effective pour les revêtements tempérés.*

**Corollaire 2.1.4.** *Soit  $X$  un bon espace analytique compact de dimension 1. Alors  $\pi_1^{\text{temp}}(X)$  est le complété prodiscret  $\pi_1^{\text{ét}}(X)^{\text{pd}}$  de  $\pi_1^{\text{ét}}(X)$ .*

*Démonstration.* La catégorie des  $\pi_1^{\text{ét}}(X)^{\text{pd}}$ -ensembles est équivalente à la sous-catégorie pleine de la catégorie des  $\pi_1^{\text{ét}}(X)$ -ensembles dont toute composante connexe est dominé par un revêtement galoisien. D'après 2.1.1, cette catégorie est équivalente à celle des unions disjointes de revêtements tempérés.  $\square$

Si  $Y$  est un revêtement tempéré de  $X$ , soit  $H$  le sous-groupe des éléments de  $\pi_1^{\text{temp}}(X, x)$  qui agissent trivialement sur  $Y_x$ . C'est un sous-groupe distingué de  $\pi_1^{\text{temp}}(X, x)$ , ouvert d'après la prodiscrétion de  $\pi_1^{\text{temp}}(X, x)$ . Le revêtement tempéré galoisien correspondant  $Z \rightarrow X$  est appelé clôture galoisienne de  $Y \rightarrow X$  (il ne dépend pas de  $x$  à isomorphisme près). Si  $Y \rightarrow X$  est scindé au-dessus d'un point  $x$  de  $X$ ,  $Z \rightarrow X$  est aussi scindé au-dessus de  $x$ .

**Corollaire 2.1.5.** *Soit  $X$  une courbe algébrique,  $Y$  un revêtement étale de  $X^{\text{an}}$  qui est tempéré au-dessus d'un ouvert de Zariski  $U$  de  $X$ , alors  $Y \rightarrow X$  est tempéré.*

*Démonstration.* Soit  $\overline{X}$  une courbe complète contenant  $X$ . Soit  $Z_U \rightarrow U$  la clôture galoisienne de  $Y_U \rightarrow U$ . Alors  $Z_U \rightarrow U$  se prolonge en un revêtement galoisien  $Z \rightarrow \overline{X}$  ([2, th.2.1.11]). Il est clair que  $Z_X \rightarrow X$  est non ramifié. Donc  $Z_X$ , et a fortiori  $Y$ , est tempéré.  $\square$



**Proposition 2.1.6.** *Soit  $X$  une courbe algébrique, de compactification  $\overline{X}$ . Soit  $V$  l'ensemble des sommets du squelette de  $X$  associé à une réduction semistable. Si  $S \rightarrow X$  est un revêtement tempéré scindé en tout point  $v$  de  $V$  (c'est-à-dire  $S_v$  est un  $\pi_1^{\text{alg}}(\mathcal{H}(v))$ -ensemble trivial), alors  $S \rightarrow X$  est un revêtement topologique.*

*Démonstration.* Quitte à remplacer  $S$  par sa clôture galoisienne, on peut supposer  $S \rightarrow X$  galoisien. Soit  $G$  son groupe de Galois.

On peut aussi prolonger  $S$  en un revêtement ramifié  $\overline{S} \rightarrow \overline{X}$  ([2, th.2.1.11]).

Supposons par l'absurde qu'il existe  $x \in X$  tel que  $S_x \rightarrow x$  soit non trivial (évidemment,  $x \notin V$ ).

Soit  $A$  la composante connexe de l'ouvert  $\overline{X} \setminus V$  qui contient  $x$ . Alors  $A$  est ou bien isomorphe à la boule ouverte  $B(0, 1)$  ou bien isomorphe à une couronne ouverte.

De plus  $\overline{S}_A \rightarrow A$  est ramifié au-dessus d'au plus un point de  $A$  (il y a au plus un point cuspidal de  $X$  dans  $A$ ). Commençons par supposer  $A \simeq B(0, 1)$ , et fixons un isomorphisme (ce qui nous permettra d'identifier  $A$  à  $B(0, 1)$ ).

Soit  $v \in V$  le point frontière de  $A$ . Par définition d'un revêtement ramifié, il existe un voisinage  $V$  de  $v$  tel que  $\overline{S}_V = \coprod_{i \in I} U_i$  avec  $U_i$  un revêtement étale fini de  $V$  d'ordre  $n_i$ . Comme  $S$  est supposé galoisien, on peut supposer que tous les  $U_i$  sont isomorphes, et notons-le simplement  $U$ .

Comme  $U \rightarrow V$  est scindé en  $v$ , quitte à réduire  $V$ , on peut supposer que  $U \rightarrow V$  est scindé. On peut donc supposer  $U \simeq V$ , c'est-à-dire  $S_V = \coprod_{i \in I} V$ .

$V \cap A$  contient une couronne ouverte  $A(\epsilon, 1)$  pour  $\epsilon < 1$  assez grand (quand on identifie  $A$  avec  $B(0, 1)$ ).

Construisons alors  $T$  par recollement de  $\overline{S}_A$  et de  $\coprod_I B(\infty, \epsilon)$  (où  $B(\infty, \epsilon) = \{z \in \mathbf{P}^1 \mid |z| > \epsilon\}$ ) le long des immersions ouvertes :

$$\overline{S}_A \supset \coprod_I A(\epsilon, 1) \subset \coprod_I B(\infty, \epsilon).$$

On a un morphisme  $T \rightarrow \mathbf{P}^1$  dont la restriction à  $\overline{S}_A$  est  $\overline{S}_A \rightarrow A \simeq B(0, 1) \subset \mathbf{P}^1$  et la restriction à  $\coprod_I B(\infty, \epsilon)$  est  $\coprod_I B(\infty, \epsilon) \rightarrow B(\infty, \epsilon) \subset \mathbf{P}^1$ .

La restriction de  $T \rightarrow \mathbf{P}^1$  au-dessus de  $B(0, 1)$  est isomorphe à  $\overline{S}_A \rightarrow A$ , et la restriction à  $B(\infty, \epsilon)$  est un revêtement trivial, donc  $T \rightarrow \mathbf{P}^1$  est un revêtement, ramifié en au plus un point  $x_0$ .

De plus l'action de  $G$  sur  $\overline{S}_A$  se prolonge à  $T$ , donc  $T \rightarrow \mathbf{P}^1$  est un revêtement galoisien non ramifié  $\mathbf{P}^1 \setminus \{x_0\}$ . Grâce à la remarque suivant la proposition 2.1.1, la restriction de  $T$  à  $\mathbf{P}^1 \setminus \{x_0\}$  est tempérée. Donc  $T$  est nécessairement trivial, ce qui contredit l'hypothèse faite sur  $x$ .

Si  $A$  est isomorphe à une couronne ouverte la construction est parfaitement similaire (on prolonge  $\overline{S}_A$  en un revêtement étale galoisien de  $\mathbf{P}^1$ ).  $\square$

Si  $x \in X$  est un point, l'image de  $G_{\mathcal{H}(x)} = \pi_1^{\text{alg}}(x) = \pi_1^{\text{temp}}(x) \rightarrow \pi_1^{\text{temp}}(X)$  est appelé sous-groupe de décomposition de  $x$  (il est défini à conjugaison près). C'est un sous-groupe compact de  $\pi_1^{\text{temp}}(X)$ .

**Corollaire 2.1.7.** *Soit  $X$  une courbe algébrique munie d'une réduction semistable. Le noyau de  $\pi_1^{\text{temp}}(X) \rightarrow \pi_1^{\text{top}}(X)$  est le sous-groupe distingué de  $\pi_1^{\text{temp}}(X)$  topologiquement engendré par les sous-groupes de décomposition en les sommets du squelette de  $X$  (pour cette réduction semis-stable).*

*Démonstration.* Soit  $H$  le noyau de  $\pi_1^{\text{temp}}(X) \rightarrow \pi_1^{\text{top}}(X)$ . Puisque  $\pi_1^{\text{top}}(X)$  est discret et sans torsion (car isomorphe au groupe fondamental de son squelette qui est un graphe),  $H$  contient tous les sous-groupes compacts de  $\pi_1^{\text{temp}}(X)$ , en particulier les sous-groupes de décomposition.

Soit  $S$  un revêtement tempéré de  $X$ , et  $T$  le  $\pi_1^{\text{temp}}(X)$ -ensemble correspondant. L'action de  $H$  sur  $T$  est triviale

- si et seulement si  $S$  est un revêtement topologique,
- si et seulement si  $S$  est scindé en tout  $v \in V$ ,
- si et seulement si l'action de  $G_{\mathcal{H}(v)}$  sur  $T$  est triviale pour tout sommet  $v \in V$ ,
- si et seulement si l'action du sous-groupe distingué  $H'$  engendré par les  $G_{\mathcal{H}(v)}$  sur  $T$  est triviale,
- si et seulement si l'action de l'adhérence  $\overline{H'}$  de  $H'$  sur  $T$  est triviale.

Mais  $\overline{H'}$  est aussi l'intersection des sous-groupes ouverts contenant  $H'$ , donc  $\overline{H'} = H$ .  $\square$

## 2.2 Invariance birationnelle

Soit  $K$  un corps complet non archimédien.

**Proposition 2.2.1.** *Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme birationnel entre  $K$ -schémas propres et lisses. Alors*

$$\text{Cov}^{\text{temp}}(Y)^{\mathbb{L}} \rightarrow \text{Cov}^{\text{temp}}(X)^{\mathbb{L}}$$

*est une équivalence de catégories. En particulier,*

$$\pi_1^{\text{temp}}(X)^{\mathbb{L}} \rightarrow \pi_1^{\text{temp}}(Y)^{\mathbb{L}}$$

*est un isomorphisme.*

*Démonstration.* On a un diagramme 2-commutatif de foncteurs :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_{\text{top}}(Y) & \rightarrow & \mathcal{D}_{\text{top}}(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Cov}^{\text{alg}}(Y)^{\mathbb{L}} & \simeq & \text{Cov}^{\text{alg}}(X)^{\mathbb{L}} \end{array}$$

où la flèche du bas est une équivalence d'après [17, cor. X.3.4].

Soit  $S$  un revêtement étale fini de  $Y$  et  $T := f^*S$  son pullback à  $X$  (notons  $g$  le morphisme  $T \rightarrow S$  obtenu par changement de base de  $f$ ).

Soit  $i : U \rightarrow X$  l'immersion d'un ouvert dense, telle que  $fi$  soit aussi une immersion ouverte ( $U$  est alors aussi un ouvert dense de  $Y$ ).  $j : V := i^*T \rightarrow T$  est aussi une immersion d'un ouvert dense et  $gj$  aussi.

On a un diagramme 2-commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \text{Cov}^{\text{top}}(S) & \xrightarrow{g^*} & \text{Cov}^{\text{top}}(T) \\ & \searrow (gj)^* & \downarrow j^* \\ & & \text{Cov}^{\text{top}}(V) \end{array}$$

où les flèches verticales sont des équivalences d'après la proposition 1.2.3. Donc  $\mathcal{D}_{\text{top}}(Y)_S \rightarrow \mathcal{D}_{\text{top}}(X)_T$  est une équivalence de catégories.  $\mathcal{D}_{\text{top}}(Y) \rightarrow \mathcal{D}_{\text{top}}(X)$

est donc une équivalence de catégories fibrées, et en passant aux champs associés, on en déduit que  $\mathcal{D}_{\text{temp}}(Y)^{\mathbb{L}} \rightarrow \mathcal{D}_{\text{temp}}(X)^{\mathbb{L}}$  est une équivalence de champs. En prenant les sections globales, on en déduit le résultat voulu.  $\square$

Dans le cas où  $K$  est algébriquement clos de caractéristique nulle, on peut également prouver l'invariance birationnelle directement en suivant la preuve de [17, cor. X.3.4].

En effet, soit  $f : X \rightarrow Y$  une application rationnelle dominante de  $K$ -schémas lisses et propres.  $f$  est défini sur un ouvert de Zariski  $U$  de  $X$  (notons  $f_U$  le morphisme  $U \rightarrow Y$  et  $i_U$  l'immersion  $U \rightarrow X$ ) dont le complémentaire est de codimension  $\geq 2$  dans  $X$ , on obtient un foncteur de  $\text{Cov}^{\text{temp}}(Y)^{\mathbb{L}}$  vers  $\text{Cov}^{\text{temp}}(X)^{\mathbb{L}}$  et, grâce à la proposition 1.2.4 on peut le composer avec un quasi-inverse  $\text{Cov}^{\text{temp}}(U)^{\mathbb{L}} \rightarrow \text{Cov}^{\text{temp}}(X)^{\mathbb{L}}$  : on obtient un foncteur  $f_{(U)}^* : \text{Cov}^{\text{temp}}(Y) \rightarrow \text{Cov}^{\text{temp}}(X)$  tel que  $i_U^* f_{(U)}^*$  soit isomorphe à  $f_U^*$ . Si l'on choisit un autre ouvert de Zariski  $U'$  de  $X$  vérifiant les mêmes propriétés,  $i_{U \cap U'}^* f_{(U)}^*$  et  $i_{U \cap U'}^* f_{(U')}^*$  sont tous les deux isomorphes à  $f_{U \cap U'}^*$ , et donc  $f_{(U)}^*$  et  $f_{(U')}^*$  sont isomorphes, puisque  $X \setminus U \cap U'$  est également de codimension  $\geq 2$  dans  $X$ . On obtient donc un homomorphisme extérieur de groupes topologiques  $f_* : \pi_1^{\text{temp}}(X) \rightarrow \pi_1^{\text{temp}}(Y)$ , qui ne dépend pas de  $U$ . En particulier si  $f$  est un morphisme de schémas, on peut choisir  $U = X$  et  $f_*$  est l'homomorphisme extérieur usuel  $\pi_1^{\text{temp}}(X) \rightarrow \pi_1^{\text{temp}}(Y)$ . Soit  $g : Y \rightarrow Z$  une autre application rationnelle dominante entre  $K$ -schémas propres et lisses. Elle est définie sur un ouvert de Zariski  $V$  de  $Y$  dont le complémentaire est de codimension  $\geq 2$  dans  $Y$ .  $gf : X \rightarrow Z$  est aussi une application rationnelle dominante de  $K$ -schémas propres et lisses.  $gf$  est donc définie sur un ouvert de Zariski  $W$  de  $X$  dont le complémentaire est de dimension  $\geq 2$ . Soit  $U_0 = U \cap f_U^{-1}(V) \cap W$  (remarquons que  $X \setminus U_0$  peut être de codimension  $< 2$ ). On a des morphismes  $U_0 \rightarrow V$  et  $V \rightarrow Z$  représentant  $f$  et  $g$  tel que le morphisme composé  $(gf)_{U_0} : U_0 \rightarrow Z$  représente  $gf$ . Donc  $i_{U_0}^* f_{(U)}^* g_{(V)}^*$  et  $i_{U_0}^* (gf)_{(W)}^*$  sont tous les deux isomorphes à  $(gf)_{U_0}^*$ . Puisque  $i_{U_0}^*$  est pleinement fidèle (prop. 1.2.4),  $f_{(U)}^* g_{(V)}^*$  et  $(gf)_{(W)}^*$  sont isomorphes (et donc  $g_* f_* = (gf)_*$ ). On obtient ainsi un foncteur de la catégorie des  $K$ -schémas propres et lisses avec pour morphismes les applications rationnelles dominantes vers la catégorie des groupes topologiques avec pour morphismes les morphismes extérieurs. En particulier, il envoie les isomorphismes (c'est-à-dire les applications birationnelles) sur des isomorphismes.

## 2.3 Altérations et groupe fondamental tempéré

Dans cette section, nous allons décrire deux applications des théorèmes d'existence d'altérations semi-stables de de Jong au groupe fondamental tempéré. En effet, Berkovich a déjà montré dans [7, § 9] comment ces altérations permettent de construire un squelette, homéomorphe à la réalisation géométrique d'un ensemble polysimplicial, sur lequel se rétracte un ouvert de Zariski de la variété.

Nous allons ici déduire des résultats de Berkovich que le groupe fondamental tempéré d'une variété algébrique lisse est invariant par changement de base algébriquement clos, et que le groupe fondamental tempéré du produit de deux variétés lisses (sur un corps de base algébriquement clos) est canoniquement

isomorphe au produit des groupes fondamentaux tempérés de chacune des variétés.

### 2.3.1 Invariance de $\pi_1^{\text{temp}}$ par extension algébriquement close de corps de base

Soit  $X$  une variété algébrique lisse et connexe sur un corps complet non archimédien algébriquement clos  $K$  de caractéristique nulle. Soit  $K'/K$  une extension isométrique de corps valués complets.

**Lemme 2.3.1.** *Le foncteur  $\text{Cov}^{\text{top}}(X) \rightarrow \text{Cov}^{\text{top}}(X_{K'})$  est une équivalence de catégories.*

*Ainsi, si  $x'$  est un point géométrique de  $X_{K'}^{\text{an}}$  d'image  $x$  dans  $X^{\text{an}}$ , alors*

$$\pi_1^{\text{top}}(X_{K'}, x') \rightarrow \pi_1^{\text{top}}(X, x)$$

*est un isomorphisme.*

*Démonstration.* Plongeons  $X$  dans un schéma  $\overline{X}$  propre, plat et de présentation finie sur  $O_K$ .

Alors, d'après le lemme 1.4.8, il existe une fibration polystable  $X'$  sur  $O_K$  génériquement lisse muni d'une action de groupe  $G$  telle que  $(X', G)$  soit une altération galoisienne de  $\overline{X}$ .

Soit  $U$  un ouvert de Zariski dense de  $\overline{X}$  (et donc dans  $X$ ) tel que  $U' \rightarrow U$  soit fini (ou  $U'$  est l'image réciproque de  $U$  dans  $X'$ ).

Alors  $U^{\text{an}}$  se rétracte par déformation forte sur  $G \backslash S(X'_s)$ , d'après le corollaire 1.4.6.

$X'_{O_{K'}}$  est aussi une fibration polystable muni d'une action de  $G$  et  $X'_{O_{K'}}$  est aussi une altération galoisienne de  $\overline{X}_{K'}$ , finie sur  $U_{K'}$ .

Ainsi comme dans le cas précédent,  $U_{K'}^{\text{an}}$  se rétracte par déformation forte sur le sous-espace  $G \backslash S(X'_{K',s})$  (et le morphisme naturel  $U_{K'}^{\text{an}} \rightarrow U^{\text{an}}$  envoie  $S(X'_{K',s})$  sur  $S(X'_s)$ ).

Mais  $C(X'_{K',s}) \rightarrow C(X'_s)$  est un isomorphisme d'après la proposition 1.4.4. Le morphisme  $U_{K'}^{\text{an}} \rightarrow U^{\text{an}}$  est donc une équivalence d'homotopie.

On a le diagramme 2-commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \text{Cov}^{\text{top}}(U_{K'}) & \longleftarrow & \text{Cov}^{\text{top}}(U) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{Cov}^{\text{top}}(X_{K'}) & \longleftarrow & \text{Cov}^{\text{top}}(X) \end{array}$$

Les flèches verticales sont des équivalences d'après 1.2.3, et nous venons de montrer que la flèche du haut est une équivalence.

La flèche du bas est donc également une équivalence.  $\square$

Supposons maintenant  $K'$  aussi algébriquement clos.

**Proposition 2.3.2.** *Soit  $x'$  un point géométrique de  $X_{K'}^{\text{an}}$  d'image  $x$  dans  $X^{\text{an}}$ , alors le morphisme  $\pi_1^{\text{temp}}(X_{K'}, x') \rightarrow \pi_1^{\text{temp}}(X, x)$  est un isomorphisme.*

*Démonstration.* Considérons un système projectif cofinal dénombrable de revêtements étales finis galoisiens géométriquement pointés  $((X_i)_i, x_i)_{i \in \mathbf{N}}$  de  $X$ . Alors  $(X_{i,K'}, x'_i)_{i \in \mathbf{N}}$ , où  $x'_i$  est un point de  $X_{i,K'}$  au-dessus de  $x_i$ , est aussi un système projectif cofinal de revêtements étales finis galoisiens géométriquement pointés de  $X_{K'}$  d'après [17, lecture XIII]). Si  $X_i^\infty$  est le revêtement topologique universel de  $X_i$ ,  $X_{i,K'}^\infty := (X_i^\infty)_{K'}$  est le revêtement topologique universel de  $X_{i,K'}$  d'après 2.3.1. Comme  $\text{Gal}(X_{i,K'}^\infty/X_{K'}) = \text{Gal}(X_i^\infty/X)$ , en prenant la limite projective pour  $i \in \mathbf{N}$ , on obtient le résultat désiré.  $\square$

### 2.3.2 Produits et groupe fondamental tempéré

Soient  $X, Y$  des variétés algébriques lisses et connexes sur un corps complet non archimédien algébriquement clos  $K$  de caractéristique nulle.

**Lemme 2.3.3.** *Si  $x$  et  $y$  sont des points géométriques de  $X^{\text{an}}$  et  $Y^{\text{an}}$  respectivement (à valeur dans un même corps  $\Omega$ ), alors*

$$\pi_1^{\text{top}}(X \times Y, (x, y)) \rightarrow \pi_1^{\text{top}}(X, x) \times \pi_1^{\text{top}}(Y, y)$$

*est un isomorphisme.*

*Démonstration.* Soit  $\overline{X}$  (resp.  $\overline{Y}$ ) un schéma propre, plat et de présentation finie sur  $O_K$ , dans lequel se plonge  $X$  (resp.  $Y$ ), et soit  $(X', G) \rightarrow \overline{X}$  (resp.  $(Y', H) \rightarrow \overline{Y}$ ) une altération galoisienne où  $X' \rightarrow O_K$  (resp.  $Y' \rightarrow O_K$ ) est une fibration polystable sur laquelle agit  $G$  (resp.  $H$ ).

Soit aussi  $U \subset X$  (resp.  $V \subset Y$ ) une immersion d'un ouvert de Zariski dense tel que  $U' \rightarrow U$  (resp.  $V' \rightarrow V$ ) soit fini.

Le fait que  $\pi_1^{\text{top}}(X \times Y, (x, y)) \rightarrow \pi_1^{\text{top}}(X, x) \times \pi_1^{\text{top}}(Y, y)$  soit un isomorphisme ne dépend pas de  $x$  et de  $y$ , on peut donc supposer  $x \in U$  et  $y \in V$ .

Alors, comme dans la preuve du lemme 2.3.1,  $U^{\text{an}}$  (resp.  $V^{\text{an}}$ ) se rétracte par déformation forte sur  $G \backslash S(X'_s)$  (resp.  $H \backslash S(Y'_s)$ ).

On obtient le même résultat pour  $X \times Y$  :

$X' \times Y' \rightarrow X \times Y$  est une altération galoisienne de groupe  $G \times H$ , et  $U \times V$  se rétracte par déformation forte sur  $(G \times H) \backslash S(X \times Y)$ .

Mais les morphismes pluristables  $X \times Y \rightarrow X$  et  $X \times Y \rightarrow Y$  envoient  $S(X \times Y)$  sur  $S(X)$  et  $S(Y)$  respectivement. D'où une application continue  $f : S(X \times Y) \rightarrow S(X) \times S(Y)$  (compatible avec l'action de  $G \times H$ ). Mais comme

$$S(X \times Y) = \bigcup_{x \in S(X)} S((X \times Y)_x) = \bigcup_{x \in S(X)} S(Y_j \otimes \mathcal{H}(x))$$

et puisque  $S(Y \otimes \mathcal{H}(x)) \rightarrow S(Y)$  est un homéomorphisme d'après la proposition 1.4.4,  $f$  est bijectif, et un homéomorphisme puisque  $S(X \times Y)$  est compact. Ainsi  $(G \times H) \backslash S(X \times Y) \rightarrow G \backslash S(X) \times H \backslash S(Y)$  est un homéomorphisme.

Donc  $(U \times V)^{\text{an}} \rightarrow U^{\text{an}} \times V^{\text{an}}$  est une équivalence d'homotopie (le produit à droite étant le produit usuel d'espaces topologiques), et  $\pi_1^{\text{top}}(U \times V, (x, y)) \rightarrow \pi_1^{\text{top}}(U, x) \times \pi_1^{\text{top}}(V, y)$  est un isomorphisme.

En appliquant la proposition 1.2.3 à  $U \subset X$ ,  $V \subset Y$  et  $U \times V \subset X \times Y$ , on obtient que

$$\pi_1^{\text{top}}(X \times Y, (x, y)) \rightarrow \pi_1^{\text{top}}(X, x) \times \pi_1^{\text{top}}(Y, y)$$

est un isomorphisme.  $\square$

**Proposition 2.3.4.** *Si  $x$  et  $y$  sont des points géométriques de  $X$  et  $Y$ , alors*

$$\pi_1^{\text{temp}}(X \times Y, (x, y)) \rightarrow \pi_1^{\text{temp}}(X, x) \times \pi_1^{\text{temp}}(Y, y)$$

*est un isomorphisme.*

*Démonstration.* Soient  $(X_i, x_i)_i$  et  $(Y_j, y_j)_j$  des systèmes projectifs dénombrables cofinaux de revêtements étales finis galoisiens connexes géométriquement pointés de  $X$  et  $Y$ . Alors  $(X_i \times Y_j, (x_i, y_j))_{(i,j)}$  est un système projectif cofinal de revêtementétales finis galoisiens connexes géométriquement pointés de  $X \times Y$  d'après [17, lecture XIII].

D'après le lemme 2.3.3,  $(X_i \times Y_j)^\infty = X_i^\infty \times Y_j^\infty$  et

$$\text{Gal}((X_i \times Y_j)^\infty / (X \times Y)) = \text{Gal}(X_i^\infty / X) \times \text{Gal}(Y_j^\infty / Y).$$

Ainsi, en prenant la limite projective pour  $(i, j) \in \mathbf{N}^2$  des isomorphismes précédents, on obtient le résultat voulu.  $\square$

## 2.4 Groupe fondamental tempéré abélianisé

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à l'abélianisé du groupe fondamental tempéré d'une courbe sur un corps non archimédien algébriquement clos de caractéristique nulle. Nous montrerons qu'il est isomorphe au groupe fondamental tempéré de la jacobienne de la courbe (l'isomorphisme étant induit par le morphisme de la courbe dans sa jacobienne).

Nous commencerons par décrire le groupe fondamental tempéré d'une variété abélienne en termes de l'uniformisation de cette variété abélienne.

Dans un second temps, nous nous restreindrons aux groupes  $(p')$ -tempérés. La description du groupe  $(p')$ -tempéré d'une courbe en terme d'un graphe de groupe d'une réduction semistable nous donne tout de suite une description de son abélianisé. On en déduira une variante  $(p')$  du résultat de comparaison voulu.

Enfin, nous montrerons directement que le morphisme du groupe fondamental tempéré abélianisé de la courbe vers celui de sa jacobienne est un isomorphisme (nous utiliserons l'invariance birationnelle et la formule de Künneth).

### 2.4.1 Groupe fondamental tempéré d'une variété abélienne

Soit  $K$  un corps valué non archimédien complet algébriquement clos de caractéristique 0.

Soit  $A$  une variété abélienne sur  $K$ , de dimension  $g$ . Décrivons son groupe fondamental tempéré.

D'après [14], il existe un groupe algébrique commutatif  $G$  (plus précisément une variété semi-abélienne) et un morphisme analytique surjectif  $u : G^{\text{an}} \rightarrow A^{\text{an}}$  qui est le revêtement topologique universel de  $A$  et  $\ker u$  est un sous-groupe discret  $\Lambda$ , libre de rang  $d$ .

On sait de plus que  $(A^{(n)} \rightarrow A)_{n \in \mathbf{N}}$  ( $\mathbf{N}$  est ordonné par la divisibilité), où  $A^{(n)}$  est une copie de  $A$  et où  $A^{(n)} \rightarrow A$  est la multiplication par  $n$ , est une famille cofinale de revêtements finis galoisiens pointés de  $A$  (d'après par exemple [17,

exposé XI]).

Soit  $G^{(n)}$  le revêtement universel de  $A^{(n)}$  (qui est isomorphe à  $G$  puisque  $A^{(n)}$  est isomorphe à  $A$ ) : on a

$$\pi_1^{\text{temp}}(A) = \varprojlim_n \text{Gal}(G^{(n)}/A).$$

$\pi_1^{\text{top}}(A^{(n)}) = \pi_1^{\text{top}}(A) = \Lambda \simeq \mathbf{Z}^d$  est résiduellement fini pour tout  $n$ .  $\text{Gal}(G^{(n)}/A)$  a un sous-groupe d'indice fini qui est résiduellement fini donc est résiduellement fini.  $\pi_1^{\text{temp}}(A)$  est donc résiduellement fini en tant que limite projective de groupes résiduellement finis. Ainsi  $\pi_1^{\text{temp}}(A)$  s'injecte dans son complété profini  $\pi_1^{\text{alg}}(A)$ , qui est abélien, donc  $\pi_1^{\text{temp}}(A)$  est lui-même abélien.

Si  $n|m$ , on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} G^{(m)} & \longrightarrow & G^{(n)} & \longrightarrow & G \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A^{(m)} & \longrightarrow & A^{(n)} & \longrightarrow & A \end{array}$$

où la flèche  $G^{(m)} \rightarrow G^{(n)}$  n'est autre que la multiplication par  $m/n$  (c'est un revêtement étale fini).

D'où un diagramme commutatif de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Gal}(G^{(m)}/G) & \longrightarrow & \text{Gal}(G^{(m)}/A) & \longrightarrow & \text{Gal}(G/A) = \Lambda \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \text{Gal}(G^{(n)}/G) & \longrightarrow & \text{Gal}(G^{(n)}/A) & \longrightarrow & \text{Gal}(G/A) = \Lambda \longrightarrow 0 \end{array}$$

En passant à la limite projective, on obtient la suite exacte suivante (l'exactitude à droite résulte de la finitude des  $\text{Gal}(G^{(n)}/G)$ ) :

$$0 \longrightarrow \varprojlim_n \text{Gal}(G^{(n)}/G) \longrightarrow \pi_1^{\text{temp}}(A) \longrightarrow \Lambda \longrightarrow 0, \quad (2.1)$$

avec  $\pi_1^{\text{temp}}(A)$  abélien. C'est donc en fait une suite exacte de groupes abéliens. Or  $\Lambda$  est un groupe abélien libre donc la suite exacte est scindée, d'où un isomorphisme non canonique :

$$\pi_1^{\text{temp}}(A) \simeq \Lambda \times \varprojlim_n \text{Gal}(G^{(n)}/G).$$

Notons  $T(G) = \varprojlim_n \text{Gal}(G^{(n)}/G)$ . C'est un groupe abélien profini, donc il se décompose canoniquement comme produit de ses pro- $l$ -Sylows  $T_l(G)$ .

En prenant le complété pro- $l$  de l'isomorphisme ci-dessus, on obtient :

$$\mathbf{Z}_l^{2g} \simeq \mathbf{Z}_l^d \times T_l(G),$$

d'où  $T_l(G) \simeq \mathbf{Z}_l^{2g-d}$ . En résumé, on obtient donc un isomorphisme non canonique :

$$\pi_1^{\text{temp}}(A) \simeq \mathbf{Z}^d \times \widehat{\mathbf{Z}}^{2g-d}.$$

*Remarque.* On a une description analogue pour le groupe fondamental  $\mathbb{L}$ -tempéré (qui d'ailleurs peut être reconstruit, comme pour les courbes, à partir du groupe fondamental tempéré puisque le groupe fondamental topologique de tout revêtement étale fini de  $A$  est sans torsion).

Soit  $K_0$  un sous-corps complet de  $K$  à valuation discrète. Soit  $A_{K_0}$  une variété abélienne sur  $K_0$  telle que  $A = A_{K_0} \times_{K_0} K$  et supposons également  $A_{K_0}$  à réduction semistable. Alors  $T_l(G)$  est appelé la *partie fixe* de  $T_l(A) = \pi_1^{\text{alg}}(A)$  et est notée  $T_l(A)^f$  dans [18, exposé IX] (cf. [18, §IX.7] ; si  $A_{K_0}$  n'est plus supposée à réduction semistable,  $T_l(G)$  est la partie essentiellement fixe  $T_l(A)^{ef}$ ). Cette partie fixe s'interprète aussi comme les éléments fixes par l'action de l'inertie sur  $T_l(A)$ .

Remarquons qu'on peut reconstruire  $T_l(A)^{ef}$  à partir de  $\pi_1^{\text{temp}}(A)^l$  puisque c'est son unique sous-groupe compact maximal. On peut également caractériser la partie essentiellement torique  $T_l(A)^{et}$  en termes de groupes fondamentaux tempérés et de l'accouplement de dualité puisque c'est l'orthogonal de la partie essentiellement fixe du module de Tate de la variété duale.

## 2.4.2 Abélianisation du groupe fondamental $(p')$ -tempéré d'une courbe

Soit  $p$  la caractéristique résiduelle de  $K$ .

Soit  $K$  un corps complet à valuation discrète, de complété de clôture algébrique  $\bar{K}$ . Soit  $C$  une courbe lisse projective géométriquement connexe sur  $K$  de genre  $g$ , et soit  $C_{\bar{K}}$  une réduction semi-stable de  $C_{\bar{K}}$  de nombre de cycles  $h$ . On note  $\mathcal{G}$  le graphe de pro- $(p')$ -groupes associé (1.2.2). On a alors un isomorphisme :

$$\pi_1^{\text{temp}}(C_{\bar{K}})^{(p')} \simeq \pi_1^{\text{temp}}(\mathcal{G}).$$

Si  $G$  est un groupe topologique prodiscret ayant une base dénombrable de voisinage de 1, on note  $G^{\text{ab}}$  le groupe topologique  $G/\overline{D(G)}$  (où  $\overline{D(G)}$  est l'adhérence du sous-groupe dérivé de  $G$ ), c'est aussi un groupe prodiscret, et  $G \rightarrow G^{\text{ab}}$  identifie  $G^{\text{ab}} - \text{Ens}$  à une sous-catégorie pleine de  $G - \text{Ens}$ .

Soit  $\mathring{\mathcal{G}}$  le graphe de groupes obtenus en remplaçant les composantes  $G_x$  de  $\mathcal{G}$  par les groupes discrets sous-jacents  $\mathring{G}_x$ . Soit  $\pi_1^{\text{ét}}(\mathring{\mathcal{G}})$  son groupe fondamental.  $\mathcal{B}^{\text{temp}}(\mathcal{G})$  est une sous-catégorie pleine de  $\mathcal{B}(\mathring{\mathcal{G}})$ , et  $\pi_1^{\text{temp}}(\mathcal{G})^{\text{ab}} - \text{Ens}$  est une sous-catégorie pleine de  $\pi_1^{\text{ét}}(\mathring{\mathcal{G}})^{\text{ab}} - \text{Ens}$ .

Alors, si  $\mathbb{T}$  est un sous-arbre maximal de  $\mathbb{G}$ , on dispose d'une présentation de  $\pi_1^{\text{ét}}(\mathring{\mathcal{G}})$  de la forme suivante (voir par exemple [38, 2.2.3]) :

$$(\ast_{e \notin \mathbb{T}} \mathbf{Z}e \ast \ast_v \mathring{G}_v)/H,$$

où  $H$  est le sous-groupe normal engendré par :

- $b_{1*}(a)b_{2*}(a^{-1})$  pour toute arête  $e$  de  $\mathbb{T}$  (il y en a  $h$ ), de branches  $b_1$  et  $b_2$ , et pour tout  $a \in G_e$ ,
- $b_{1*}(a)eb_{2*}(a^{-1})e^{-1}$  pour chaque arête  $e \notin \mathbb{T}$ , de branches  $b_1$  et  $b_2$ , et pour tout  $a \in G_e$  (on a choisit pour chacune de ces arêtes une orientation arbitraire).



On obtient, en envoyant les  $\mathring{G}_v$  sur l'élément neutre un quotient discret  $\bigstar_{e \notin T} \mathbf{Z}e$  qui correspond au revêtement topologique universel de  $\mathbb{G}$  (c'est-à-dire  $\pi_1^{\text{top}}(\mathcal{G}) = \bigstar_{e \notin T} \mathbf{Z}e$ ).

En abélianisant cette présentation, on en déduit que

$$\pi_1^{\text{ét}}(\mathring{\mathcal{G}})^{\text{ab}} = \prod_{e \notin T} \mathbf{Z}e \times \left( \prod_v \mathring{G}_v^{\text{ab}} / H \right),$$

où  $H$  est le sous-groupe engendré par les  $b_{1*}(a)b_{2*}(a^{-1})$  et  $\prod_{e \notin T} \mathbf{Z}e = \pi_1^{\text{top}}(\mathbb{G})^{\text{ab}}$ . Comme  $G_v$  agit continûment sur les revêtements tempérés abéliens, le morphisme

$$\mathring{G}_v \rightarrow \pi_1^{\text{temp}}(\mathcal{G})^{\text{ab}}$$

se factorise par

$$G_v \rightarrow \pi_1^{\text{temp}}(\mathcal{G})^{\text{ab}},$$

et donc

$$\prod_{e \notin T} \mathbf{Z}e \times \left( \prod_v \mathring{G}_v^{\text{ab}} / H \right) \rightarrow \pi_1^{\text{temp}}(\mathcal{G})^{\text{ab}}$$

se factorise par

$$\prod_{e \notin T} \mathbf{Z}e \times \left( \prod_v G_v^{\text{ab}} / \overline{H} \right) \rightarrow \pi_1^{\text{temp}}(\mathcal{G})^{\text{ab}}.$$

En notant  $G_0 = \prod_v G_v^{\text{ab}} / \overline{H} \simeq (\mathbf{Z}^{(p')})^{2g-h}$  (où  $\mathbf{Z}^{(p')} = \prod_{q \neq p} \mathbf{Z}_q$ ), on a donc un morphisme d'image dense (qui correspond à un foncteur pleinement fidèle sur les catégories classifiantes correspondantes)

$$G_1 := G_0 \times \mathbf{Z}^h \rightarrow \pi_1^{\text{temp}}(\mathcal{G})^{\text{ab}},$$

(et le quotient  $G_1 \rightarrow \mathbf{Z}^h$  identifie  $\mathbf{Z}^h$  à  $\pi_1^{\text{top}}(\mathbb{G})^{\text{ab}}$ ).

Plus canoniquement, on a une suite exacte scindée de groupes abéliens topologiques :

$$0 \rightarrow G_0 \rightarrow G_1 \rightarrow \pi_1^{\text{top}}(\mathcal{G})^{\text{ab}} \rightarrow 0. \quad (2.2)$$

Soit  $S$  un  $G_1$ -ensemble connexe (qui correspond à un revêtement de  $\mathring{\mathcal{G}}$ ); comme chaque composante  $G_v$  agit continûment sur  $S$ , il correspond en fait à un revêtement de  $\mathcal{G}$ , correspondant à un sous-groupe ouvert  $U$  de  $G_1$ .

Soit  $U_0 = U \cap G_0$ , c'est un sous-groupe ouvert de  $G_0$ , mais aussi de  $G_1$ . Il correspond donc à un  $G$ -ensemble connexe  $S_0$  qui domine  $S$  car  $U \subset U_0$ .

Soit  $U_1 = U_0 \times \mathbf{Z}^h \subset G_1$ , c'est un sous-groupe ouvert d'indice fini de  $G_1$ , correspondant donc à un  $G_1$ -ensemble  $S_1$  fini connexe. L'inclusion  $U_0 \subset U_1$  induit un morphisme  $S_0 \rightarrow S_1$ , qui est scindé en toute composante  $G_v : S_0 \rightarrow S_1$  est donc un revêtement topologique, donc  $S$  est un revêtement tempéré.

Tout revêtement étale abélien de  $\mathcal{G}$  est donc aussi tempéré (et il est même dominé par un revêtement abélien qui est topologique sur un revêtement fini), d'où un isomorphisme :

$$\pi_1^{\text{temp}}(C_{\bar{K}})^{(p')\text{ab}} = \pi_1^{\text{temp}}(\mathcal{G})^{\text{ab}} \simeq (\mathbf{Z}^{(p')})^{2g-h} \times \mathbf{Z}^h.$$

*Remarque.* On aurait aussi pu utiliser directement [2, Th. III.2.1.9] pour montrer que tout  $G_1$ -ensemble connexe est tempéré, car tout quotient discret de  $G_1$  est virtuellement sans torsion.

### 2.4.3 Jacobienne et $\pi_1^{\text{temp}(p'), \text{ab}}$ d'une courbe

Soit  $K$  un corps de caractéristique 0 complet pour une valuation discrète, soit  $\bar{K}$  le complété de sa clôture algébrique. Soit  $p$  la caractéristique résiduelle. Soit  $C$  une courbe projective lisse géométriquement connexe sur  $K$ , et soit  $A$  la jacobienne de  $C_{\bar{K}}$ .

Si  $x$  est un point fermé de  $C_{\bar{K}}$ , on a un morphisme canonique  $C_{\bar{K}} \rightarrow A$  qui envoie  $x$  sur l'élément neutre de  $A$ . Il induit un morphisme  $\pi_1^{\text{temp}(C_{\bar{K}})^{(p'), \text{ab}}} \rightarrow \pi_1^{\text{temp}(A)^{(p')}$ , qui ne dépend pas de  $x$ .

**Proposition 2.4.1.** *Le morphisme  $\pi_1^{\text{temp}(C_{\bar{K}})^{(p'), \text{ab}}} \rightarrow \pi_1^{\text{temp}(A)^{(p')}$  est un isomorphisme.*

*Démonstration.* Les deux suites exactes (2.1) et (2.2) fournissent un diagramme commutatif (où l'on a conservé les notations précédentes) :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & G_0 & \longrightarrow & \pi_1^{\text{temp}(C_{\bar{K}})^{(p'), \text{ab}}} & \longrightarrow & \pi_1^{\text{top}(C_{\bar{K}})} \longrightarrow 0, \\ & & \downarrow a & & \downarrow b & & \downarrow c \\ 0 & \longrightarrow & T_{(p')}(G) & \longrightarrow & \pi_1^{\text{temp}(A)^{(p')}} & \longrightarrow & \pi_1^{\text{top}(A)} \longrightarrow 0 \end{array}$$

où  $b$  et  $c$  se déduisent de la fonctorialité du  $\pi_1^{\text{temp}(p')}$  et du  $\pi_1^{\text{top}}$ , et  $a$  s'obtient par passage au noyau.

En passant au complété pro- $(p')$ , on obtient le diagramme suivant ( $T_{(p')}(G)$  et  $G_0$  sont déjà pro- $(p')$ ) :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & G_0 & \longrightarrow & \pi_1^{\text{alg}(C_{\bar{K}})^{(p'), \text{ab}}} & \longrightarrow & \pi_1^{\text{top}(C_{\bar{K}})^{\text{ab}}}_{(p')} \longrightarrow 0, \\ & & \downarrow a & & \downarrow b' & & \downarrow c' \\ 0 & \longrightarrow & T_{(p')}(G) & \longrightarrow & \pi_1^{\text{alg}(A)^{(p')}} & \longrightarrow & \pi_1^{\text{top}(A)}_{(p')} \longrightarrow 0 \end{array}$$

où, si  $\Pi$  est un groupe topologique,  $\Pi_{(p')}$  désigne ici le complété pro- $(p')$ .

Rappelons que  $b'$  est un isomorphisme d'après la théorie de Kummer. Montrons que  $c'$  est injectif.

Soit  $\bar{y} \in \text{Ker } c'$ , et  $y$  un antécédent de  $\bar{y}$  dans  $\pi_1^{\text{alg}(C_{\bar{K}})^{(p'), \text{ab}}}$ . Alors  $G_0$  et  $\langle y \rangle$  sont en somme directe dans  $\pi_1^{\text{alg}(C_{\bar{K}})^{(p'), \text{ab}}}$ . Si  $l$  est un nombre premier tel que  $y_l$  soit non nul,  $(G_0 \oplus \langle y \rangle)_l$  est un  $\mathbf{Z}_l$ -module de rang  $2g - h + 1$ , et son image par l'isomorphisme  $b'$  est incluse dans  $T_l(G)$  qui est de rang  $2g - h$  sur  $\mathbf{Z}_l$ . D'où une contradiction, et  $c'$  est bien injectif.

On a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1^{\text{top}(C_{\bar{K}})^{\text{ab}}} & \hookrightarrow & \pi_1^{\text{top}(C_{\bar{K}})^{\text{ab}}}_{(p')} \\ \downarrow c & & \downarrow c' \\ \pi_1^{\text{top}(A)} & \hookrightarrow & \pi_1^{\text{top}(A)}_{(p')}, \end{array}$$

d'où on déduit immédiatement l'injectivité de  $c$ .

Si  $c$  n'est pas surjectif, son image  $\text{Im } c$  dans  $\pi_1^{\text{top}}(A)$  est un sous-groupe strict de  $\pi_1^{\text{top}}(A) \simeq \mathbf{Z}^h$  et est alors inclus dans un sous-groupe strict d'indice fini. On en déduit que le complété profini  $\hat{c}$  de  $c$  n'est pas non plus surjectif. Or on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1^{\text{alg}}(C_{\bar{K}})^{\text{ab}} & \longrightarrow & \widehat{\pi_1^{\text{top}}(C_{\bar{K}})^{\text{ab}}} \\ \parallel & & \downarrow \hat{c} \\ \pi_1^{\text{alg}}(A) & \longrightarrow & \widehat{\pi_1^{\text{top}}(A)} \end{array}$$

qui montre la surjectivité de  $\hat{c}$ . Donc  $c$  est bien surjectif.

$c$  est donc bijectif (et donc un isomorphisme puisque les groupes de départ et d'arrivée sont discrets).

Le morphisme  $c'$  est donc aussi un isomorphisme et  $b'$  aussi, donc  $a = \text{Ker}(b' \rightarrow c')$  est un isomorphisme. Comme  $a$  et  $c$  sont des isomorphismes,  $b$  est également un isomorphisme.  $\square$

#### 2.4.4 Jacobienne et $\pi_1^{\text{tempab}}$ d'une courbe

Soit  $K$ ,  $C$  et  $A$  comme au paragraphe précédent.

Soit  $x_0$  est un point fermé de  $C_{\bar{K}}$ . Il induit un morphisme de  $C_{\bar{K}}$  vers sa jacobienne  $A$

**Théorème 2.4.2.** *Le morphisme  $\pi_1^{\text{temp}}(C_{\bar{K}}, x_0)^{\text{ab}} \rightarrow \pi_1^{\text{temp}}(A, 0)$  est un isomorphisme.*

*Démonstration.* On a un morphisme  $C_{\bar{K}}^g \rightarrow A$  qui à  $(x_1, \dots, x_g)$  associe le diviseur de  $C_{\bar{K}}$   $[x_1] + \dots + [x_g] - g[x_0]$ . Ce morphisme est invariant par l'action de  $\mathfrak{S}_g$  sur  $C_{\bar{K}}^g$  et se factorise donc en un morphisme  $C_{\bar{K}}^{(g)} := C_{\bar{K}}^g / \mathfrak{S}_g \rightarrow A$ . Rappelons que ce morphisme est birationnel et que  $C_{\bar{K}}^{(g)}$  est lisse sur  $\bar{K}$  (voir [29, Th. 5.1.(a), prop. 3.2]).

On a donc une suite de morphismes :

$$C_{\bar{K}} \rightarrow C_{\bar{K}}^g \rightarrow C_{\bar{K}}^{(g)} \rightarrow A,$$

où le morphisme de gauche envoie  $x$  sur  $(x, x_0, \dots, x_0)$  et où la composée est le morphisme qui envoie  $x$  sur  $[x] - [x_0]$ , comme à la section précédente.

$C_{\bar{K}}^{(g)} \rightarrow A$  est un morphisme birationnel entre  $\bar{K}$ -variétés lisses et propres, donc d'après 2.2.1,  $\pi_1^{\text{temp}}(C_{\bar{K}}^{(g)}, (x_0, \dots, x_0)) \rightarrow \pi_1^{\text{temp}}(A, 0)$  est un isomorphisme. On en déduit en particulier que  $\pi_1^{\text{temp}}(C_{\bar{K}}^{(g)}, (x_0, \dots, x_0))$  est abélien et résiduellement fini.

Donc  $\pi_1^{\text{temp}}(C_{\bar{K}}, x_0) \rightarrow \pi_1^{\text{temp}}(C_{\bar{K}}^{(g)}, (x_0, \dots, x_0))$  se factorise à travers  $\phi : \pi_1^{\text{temp}}(C_{\bar{K}}, x_0)^{\text{ab}} \rightarrow \pi_1^{\text{temp}}(C_{\bar{K}}^{(g)}, (x_0, \dots, x_0))$ .

Comme  $\pi_1^{\text{temp}}(C_{\bar{K}}, x_0)^{\text{ab}}$  est une limite projective de groupes abéliens de type fini donc résiduellement finis, il est lui-même résiduellement fini. Le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1^{\text{temp}}(C_{\bar{K}}, x_0)^{\text{ab}} & \xrightarrow{\phi} & \pi_1^{\text{temp}}(C_{\bar{K}}^{(g)}, (x_0, \dots, x_0)) , \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1^{\text{alg}}(C_{\bar{K}}, x_0)^{\text{ab}} & \xrightarrow{\simeq} & \pi_1^{\text{alg}}(C_{\bar{K}}^{(g)}, (x_0, \dots, x_0)) \end{array}$$

dont les flèches verticales sont injectives, puisque  $\pi_1^{\text{temp}}(C_{\bar{K}}, x_0)$  et  $\pi_1^{\text{temp}}(C_{\bar{K}}^{(g)}, (x_0, \dots, x_0))$  sont résiduellement finis, montre que  $\phi$  est injectif.

On peut munir également  $C_{\bar{K}}^{(g)}$  d'une structure d'orbifold en tant que  $C_{\bar{K}}^g/\mathfrak{S}_g$  (voir [2, § III.4.4.1]), et définir un groupe fondamental tempéré d'orbifold correspondant (voir [2, § III.4.5]).

On a le diagramme dont la ligne est exacte (voir [2, prop. III.4.5.8] pour la ligne supérieure) :

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \pi_1^{\text{temp}}(C_{\bar{K}}^g, (x_0, \dots, x_0)) & \xrightarrow{i} & \pi_1^{\text{orb}}(C_{\bar{K}}^{(g)}, (x_0, \dots, x_0)) & \longrightarrow & \mathfrak{S}_g \longrightarrow 1 \\ & & \searrow \alpha & & \downarrow \pi_1 & & \\ & & & & \pi_1^{\text{orb}}(C_{\bar{K}}^{(g)}, (x_0, \dots, x_0))^{\text{ab}} & & \\ & & & & \downarrow \pi_2 & & \\ & & & & \pi_1^{\text{temp}}(C_{\bar{K}}^{(g)}, (x_0, \dots, x_0)) & & \end{array}$$

Les morphismes  $i$ ,  $\pi_1$  et  $\pi_2$  sont ouverts, donc  $\alpha = \pi_2 \pi_1 i$  est ouvert.

Or  $\alpha$  est d'image dense car  $\hat{\alpha}$  est surjectif (puisque  $\pi_1^{\text{alg}}(C_{\bar{K}}) \rightarrow \pi_1^{\text{alg}}(C_{\bar{K}}^{(g)})$ , qui se factorise par  $\hat{\alpha}$  l'est) et  $\pi_1^{\text{temp}}(C_{\bar{K}}^{(g)}, (x_0, \dots, x_0))$  est résiduellement fini, donc  $\alpha$  est également surjectif.

Considérons maintenant  $\delta : \pi_1^{\text{temp}}(C_{\bar{K}}, x_0) \rightarrow \pi_1^{\text{temp}}(C_{\bar{K}}^g, (x_0, \dots, x_0))$ . En identifiant  $\pi_1^{\text{temp}}(C_{\bar{K}}^g, (x_0, \dots, x_0))$  à  $\pi_1^{\text{temp}}(C_{\bar{K}}, (x_0, \dots, x_0))^g$ ,  $\delta$  peut être identifié à  $\pi_1^{\text{temp}}(C_{\bar{K}}, x_0) \rightarrow \pi_1^{\text{temp}}(C_{\bar{K}}, x_0)^g : g \mapsto (g, 1, \dots, 1)$ .

Ainsi  $\pi_1^{\text{temp}}(C_{\bar{K}}^g, (x_0, \dots, x_0))$  est engendré par les images de  $\sigma \circ \delta$  quand  $\sigma$  décrit  $\mathfrak{S}_g$ , et comme  $\alpha$  est invariant par  $\sigma$ ,  $\alpha \circ \delta$  est surjectif donc  $\pi_1^{\text{temp}}(C_{\bar{K}}, x_0)^{\text{ab}} \rightarrow \pi_1^{\text{temp}}(C_{\bar{K}}^{(g)}, (x_0, \dots, x_0))$  aussi et c'est donc un isomorphisme.

De même si  $U$  est un sous-groupe ouvert de  $\pi_1^{\text{temp}}(C_{\bar{K}}, x_0)$ , le groupe engendré par les  $\sigma(\delta(U))$  est un groupe ouvert de  $\pi_1^{\text{temp}}(C_{\bar{K}}^g, (x_0, \dots, x_0))$ , donc, comme  $\alpha$  est ouvert et  $\mathfrak{S}_g$ -invariant,  $\alpha \circ \delta$  est ouvert, donc  $\pi_1^{\text{temp}}(C_{\bar{K}}, x_0)^{\text{ab}} \rightarrow \pi_1^{\text{temp}}(C_{\bar{K}}^{(g)}, (x_0, \dots, x_0))$  est aussi ouvert donc un isomorphisme.  $\square$

## Chapitre 3

# Métrique du graphe de la réduction stable d'une courbe de Mumford

Le but principal de ce chapitre est de prouver que le graphe métrisé associé au modèle stable d'une courbe de Mumford (ou, de manière équivalente, du graphe sous-jacent au squelette de l'espace de Berkovich de la courbe, cf. 1.4) ne dépend que du groupe fondamental tempéré de la courbe.

Nous considérerons seulement le cas de caractéristique mixte (dans le cas d'égale caractéristique nulle, c'est certainement faux puisque le groupe fondamental tempéré dépend uniquement du graphe de groupe associé à la courbe selon [33, ex. 3.10]).

**Définition 3.0.1.** Une *métrique* sur un graphe  $\mathbb{G}$  est une fonction

$$d : \{\text{arêtes de } \mathbb{G}\} \rightarrow \mathbf{R}^{>0}.$$

Pour toute arête  $e$ ,  $d(e)$  est appelé la *longueur* de  $e$  pour la métrique  $d$ . Un graphe muni d'une métrique est appelé un *graphe métrique*.

Soit  $X = \overline{X} \setminus D$  une courbe sur un corps complet non archimédien algébriquement clos  $K$ , munie d'un modèle semistable  $(\mathcal{X}, \mathcal{D})$  (cf. 1.2.2). Soit  $e$  une arête du graphe de la réduction semistable (c'est-à-dire un point double de  $\mathcal{X}_s$ ). Alors, localement pour la topologie étale en ce point double,  $\mathcal{X}$  est étale sur  $O_K[X_0, X_1]/(X_0X_1 - a)$ , avec  $a \in O_K$ . D'après [39, cor. 2.2.18],  $|a|$  ne dépend d'aucun choix. Nous noterons alors

$$d(e) = -\log_p(|a|),$$

ce qui définit une métrique naturelle sur le graphe de cette réduction semistable de  $X$ .

Par exemple, si  $\mathcal{X}$  est le modèle stable de  $\mathbf{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty, \lambda\}$  avec  $|\lambda| < 1$ , alors le graphe de  $\mathcal{X}$  a une unique arête de longueur  $-\log_p(|\lambda|)$ .

Nous savons déjà, grâce à [33, ex. 3.10], que l'on peut reconstruire le graphe de la réduction stable de la courbe à partir du groupe fondamental tempéré. On

peut déduire de l'étude de Mochizuki que l'on peut déterminer, pour tout sous-groupe ouvert d'indice fini du groupe fondamental tempéré et pour tout sommet du graphe de la réduction stable de la courbe, si le revêtement correspondant de la courbe est totalement décomposé en ce sommet (un revêtement  $X' \rightarrow X$  de variétés est dit *totalement décomposé* en un point  $x \in X$  si  $\mathcal{H}(x) \rightarrow \mathcal{H}(x')$  est un isomorphisme pour tout  $x' \in X'$  au-dessus de  $x$ ; un revêtement  $X' \rightarrow X$  d'ordre  $n$  est décomposé en  $x$  si et seulement si la fibre de  $x$  a pour cardinal  $n$ , ce qui revient aussi à dire que localement au voisinage de  $x$ ,  $X' \rightarrow X$  est un revêtement topologique ([2, III.1.2.1])).

Ceci suggère de regarder quels revêtements étales finis de notre courbe de Mumford sont décomposés en un sommet (ou un ensemble de sommets). En étudiant des revêtements étales finis assez simples, on se convainc que la métrique du graphe doit jouer un rôle dans le groupe fondamental tempéré.

Commençons par un cas élémentaire mais qui illustre le rôle que peut avoir la distance dans le fait qu'un revêtement soit décomposé en un point.

**Lemme 3.0.3.** *Le revêtement  $\mathbf{G}_m \xrightarrow{z \mapsto z^{p^h}} \mathbf{G}_m$  est totalement décomposé au dessus du point de Berkovich  $b(1, r)$  (correspondant à la boule ouverte  $B(1, r)$  de centre 1 et de rayon  $r$  avec  $r < 1$ ) si et seulement si  $r < p^{-h - \frac{1}{p-1}}$ . Plus précisément, l'image réciproque de  $b(1, r)$  a  $p^i$  éléments :*

- avec  $i = 0$  quand  $r \in ]p^{-\frac{p}{p-1}}, 1]$  ;
- quand  $r \in ]p^{-i - \frac{p}{p-1}}, p^{-i - \frac{1}{p-1}}]$  et  $1 \leq i \leq h - 1$  ;
- avec  $i = h$  quand  $r \in [0, p^{-h - \frac{1}{p-1}}]$ .

*Démonstration.* Nous Posons  $g : z \mapsto z^p$ , et calculons  $g(b(z_1, r))$  avec  $|z_1| = 1$  et  $r < 1$ . Posons  $g_1 : z \mapsto (z + z_1)^p - z_1^p = \sum_{i=1}^p a_i z^i$  avec  $|a_p| = 1$  et  $|a_i| = p^{-1}$  si  $1 \leq i \leq p - 1$ .

Si  $f \in \mathbf{C}_p[X]$ ,

$$|f|_{g(b(z_1, r))} = |f \circ g|_{b(z_1, r)} = \sup_{x \in B(z_1, r)_{K'}} |f \circ g(x)| = \sup_{y \in g(B(z_1, r)_{K'})} |f(y)|,$$

où  $K'$  est une extension isométrique algébriquement close sphériquement complète de  $\mathbf{C}_p$ .

Or  $g(B(z_1, r)_{K'}) = B(z_1^p, r')_{K'}$  avec

$$r' = \sup_{|z| < r} |g_1(z)| = \max |a_i| r^i = \max\{r^p, r p^{-1}\} = \begin{cases} r p^{-1} & \text{if } r \leq p^{-\frac{1}{p-1}} \\ r^p & \text{if } r \geq p^{-\frac{1}{p-1}} \end{cases}$$

Donc

$$|f|_{g(b(z_1, r))} = \sup_{y \in B(z_1^p, r')_{K'}} |f(y)| = |f|_{b(z_1^p, r')}$$

et donc  $g(b(z_1, r)) = b(z_1^p, r')$ .

De plus, soit  $z_0$  de norme 1, soit  $z_0^{1/p}$  une racine  $p^e$  de  $z_0$  et soit  $r' < 1$ . Posons

$$r = \begin{cases} p r' & \text{si } r' \leq p^{-\frac{p}{p-1}} \\ r'^{1/p} & \text{si } r' \geq p^{-\frac{p}{p-1}} \end{cases}$$

Alors  $b(z_0^{1/p}, r) \in g^{-1}(b(z_0, r'))$ . Les autres éléments de  $g^{-1}(b(z_0, r'))$  sont les conjugués par l'action du groupe de Galois  $\mu_p$  du revêtement  $g : z \mapsto z^p$ . Or, si

$\zeta \in \mu_p$ , alors  $\zeta b(z_0^{1/p}, r) = b(\zeta z_0^{1/p}, r)$ . Donc

$$g^{-1}(B(z_0, r')) = \begin{cases} \{B(\zeta z_0^{1/p}, pr')\}_{\zeta \in \mu_p} & \text{si } r' \leq p^{-\frac{p}{p-1}} \\ \{B(\zeta z_0^{1/p}, r'^{1/p})\}_{\zeta \in \mu_p} & \text{si } r' \geq p^{-\frac{p}{p-1}} \end{cases}$$

On obtient que  $g^{-1}(B(z_0, r'))$  a un unique élément si  $r' \geq p^{-\frac{p}{p-1}}$  et  $p$  éléments sinon (car  $|\zeta - \zeta'| = p^{-\frac{1}{p-1}}$  si  $\zeta \neq \zeta' \in \mu_p$ ). On obtient donc le résultat voulu quand  $h = 1$ .

Dans le cas général, on raisonne par récurrence sur  $h$  en décomposant  $z \mapsto z^{p^h}$  en  $z \mapsto z^{p^{h-1}} \mapsto z^{p^h}$ .  $\square$

Grâce à ce résultat, nous pourrions étudier le cas d'une droite projective privée de quelques points et, par découpage et recollage de ce type de revêtements, le cas d'une courbe elliptique épointée.

Dans le cas plus général d'une courbe de Mumford  $X$  (théorème 3.4.6), nous étudierions aussi la structure des  $\mathbf{Z}/p^h\mathbf{Z}$ -torseurs. La théorie des fonctions thêta telle qu'on peut la trouver dans [42] et [41] nous dit que le pullback d'un tel torseur

au revêtement topologique universel  $\Omega$  est en fait le pullback de  $\mathbf{G}_m \xrightarrow{z \mapsto z^{p^h}} \mathbf{G}_m$  le long d'une fonction thêta  $\Omega \rightarrow \mathbf{G}_m$ , qui à son tour correspond à un courant sur l'arbre  $\mathbb{T}(\Omega)$  de  $\Omega$  (proposition 3.4.1). Ainsi, nous commencerons notre étude en prouvant que si deux courants coïncident sur une partie "assez grosse" de  $\mathbb{T}(\Omega)$ , le quotient des deux fonctions inversibles associées varie assez peu sur une partie légèrement plus petite de  $\mathbb{T}(\Omega)$  et donc les deux  $\mathbf{Z}/p^h\mathbf{Z}$ -torseurs seront décomposés en les mêmes points de cette partie de  $\mathbb{T}(\Omega)$ . Ainsi, nous considérerons des courants qui, sur une "assez grosse" partie de  $\Omega$ , coïncident avec le courant correspondant à une homographie inversible sur  $\Omega$  et qui est équivariant pour un sous-groupe d'indice fini de  $\text{Gal}(\Omega/X)$ . Nous considérerons ensuite le  $\mathbf{Z}/p^h\mathbf{Z}$ -torseur sur un certain revêtement topologique fini de  $X$  qui se comporte comme  $\mathbf{G}_m \xrightarrow{z \mapsto z^{p^h}} \mathbf{G}_m$  sur une certaine partie de  $\mathbb{T}(\Omega)$  (d'après corollaire 3.4.4). Nous en déduirons que la longueur de tout cycle de tout revêtement topologique du graphe du modèle stable de  $X$  peut-être retrouvé à partir du groupe fondamental tempéré. Un dernier argument combinatoire donnera le résultat souhaité.

### 3.1 Préliminaires

Soient  $K$  un corps valué complet non archimédien de caractéristique 0,  $O_K$  son anneau des entiers,  $k$  son corps résiduel, supposé de caractéristique  $p > 0$ , et soit  $\overline{K}$  le complété d'une clôture algébrique de  $K$  (d'anneau des entiers  $O_{\overline{K}}$ ). On fixe un système compatible de racines de 1 dans  $\overline{K}$ , ce qui nous permet d'identifier  $\mu_n$  et  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ . Nous parlerons donc de  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ -torseurs sur une courbe sur  $\overline{K}$  quand il serait plus naturel de parler de  $\mu_n$ -torseurs.

Soient  $X_{1,K}$ ,  $X_{2,K}$  deux courbes hyperboliques de type  $(g, n)$  sur  $K$ . Pour  $i = 1, 2$ , nous noterons  $\Pi_i := \pi_1^{\text{temp}}(X_{i, \overline{K}})$ . Soit  $\phi$  un isomorphisme  $\Pi_1 \simeq \Pi_2$ .

Soit  $H_1$  un sous-groupe ouvert d'indice fini de  $\pi_1^{\text{temp}}(X_{1, \overline{K}})$  et soit  $H_2 := \phi(H_1)$ .

Soit  $Y_{i, \overline{K}} \rightarrow X_{i, \overline{K}}$  le revêtement étale fini connexe de  $X_{i, \overline{K}}$  correspondant à  $H_i$ .

Soient  $X_i$  et  $Y_i$  les modèles stables de  $X_{i,\overline{K}}$  and  $Y_{i,\overline{K}}$ , et soit  $\psi_i : Y_i \rightarrow X_i$  l'unique morphisme étendant  $Y_{i,\overline{K}} \rightarrow X_{i,\overline{K}}$ . On notera  $X_{i,s}$  la fibre spéciale de  $X_i$  et  $X_{i,\eta}$  la fibre générique de  $X_i$  (c'est-à-dire  $X_{i,\overline{K}}$ ).

D'après 1.2.5,  $\phi$  induit un isomorphisme  $\mathcal{G}_1^c \simeq \mathcal{G}_2^c$  entre les semigraphes d'anabélioides de  $X_1$  et  $X_2$ . De même,  $H_1 \simeq H_2$  induit un isomorphisme  $\mathcal{H}_1^c \rightarrow \mathcal{H}_2^c$  entre les semigraphes d'anabélioides de  $Y_1$  et  $Y_2$ .

Un *point cuspidal* d'une courbe hyperbolique de type  $(g, n)$  est un des  $n$  points du complété de la courbe qui n'est pas dans la courbe elle-même.

Nous nous intéressons à savoir quelles données peuvent être récupérées sur la préimage des sommets du squelette et des points cuspidaux de  $X_{i,\overline{K}}$  à partir de  $\phi : \pi_1^{\text{temp}}(Y_{i,\overline{K}}) \rightarrow \pi_1^{\text{temp}}(X_{i,\overline{K}})$ .

**Lemme 3.1.1.** *Soit  $x_1$  un point cuspidal de  $X_{1,s}$ , et  $x_2$  le point cuspidal de  $X_{2,s}$  correspondant à  $x_1$  par l'isomorphisme de semigraphes  $\mathbb{G}_1^c \simeq \mathbb{G}_2^c$ . Soit  $x'_1$  le point cuspidal correspondant de  $X_{1,\eta}$ . Alors  $\psi_{1,\eta}^{-1}(x'_1)$  et  $\psi_{2,\eta}^{-1}(x'_2)$  ont le même nombre d'éléments.*

*Démonstration.* Soit  $y_i$  un point cuspidal de  $Y_{i,s}$  (correspondant à un point cuspidal  $y'_i$  de  $Y_{i,\eta}$ ) et soit  $z_i$  son image dans  $X_{i,s}$  (correspondant à un point cuspidal  $z'_i$  de  $X_{i,\eta}$ ).

Supposons que  $y_1$  et  $y_2$  se correspondent l'un l'autre par l'isomorphisme  $\mathbb{G}_1^c \simeq \mathbb{G}_2^c$ .

Soit  $I_i \subset H_i^{(p')}$  un sous-groupe d'inertie de  $y_i$ . L'image de  $I_i$  dans  $\Pi_i^{(p')}$  est un sous-groupe ouvert (et donc non trivial) d'un groupe d'inertie de  $z_i$ . Comme l'intersection de deux groupes d'inertie différents est réduite à  $\{1\}$ , l'image de  $I_i$  n'est contenu dans aucun autre groupe d'inertie de  $X_{i,s}$ , donc  $z_i$  est caractérisé par le morphisme  $H_i \rightarrow \Pi_i$  comme étant l'unique point cuspidal de  $X_{i,s}$  tel que les groupes d'inerties de  $y_i$  s'envoient par  $H_i \rightarrow \Pi_i$  sur les groupes d'inerties de  $z_i$ . Or  $\Pi_1 \rightarrow \Pi_2$  (resp.  $H_1 \simeq H_2$ ) envoie les groupes d'inertie d'un point cuspidal de  $X_{1,s}$  (resp.  $Y_{1,s}$ ) sur les groupes d'inerties du point cuspidal correspondant de  $X_{2,s}$  (resp.  $Y_{2,s}$ ). Ainsi  $z_2$  est le point cuspidal correspondant à  $z_1$  par  $H_1 \rightarrow H_2$ . Ainsi le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \text{Cusp}(Y_{1,s}) & \simeq & \text{Cusp}(Y_{2,s}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Cusp}(X_{1,s}) & \simeq & \text{Cusp}(X_{2,s}) \end{array},$$

ce qui donne le résultat voulu.  $\square$

En particulier, le morphisme  $Y_{1,\eta} \rightarrow X_{1,\eta}$  est ramifié en  $x'_1$  si et seulement si  $Y_{2,\eta} \rightarrow X_{2,\eta}$  est ramifié en  $x'_2$ .

**Lemme 3.1.2.** *Soit  $\tilde{X}_{i,\eta}$  un ouvert de  $\overline{X}_{i,\eta}$  contenant  $X_{i,\eta}$ . Supposons que les points cuspidaux de  $\tilde{X}_{1,\eta}$  correspondent aux points cuspidaux de  $\tilde{X}_{2,\eta}$  par la bijection  $\text{Cusp}(X_{1,\eta}) \simeq \text{Cusp}(X_{2,\eta})$  induite par  $\phi$ .*

*Alors  $\phi$  induit un isomorphisme  $\pi_1^{\text{temp}}(\tilde{X}_{1,\eta}) \rightarrow \pi_1^{\text{temp}}(\tilde{X}_{2,\eta})$ .*

*Démonstration.* Soit  $S_i^\infty$  le revêtement topologique universel d'un revêtement galoisien connexe  $S_i$  de  $X_{i,\eta}$ . Alors le quotient discret correspondant de  $\Pi_i$



est une extension  $G_i$  d'un groupe libre par un quotient fini  $G_{1,i}$  de  $\Pi_i$ , qui correspond au revêtement  $S_i$  de  $X_{i,\eta}$ .

En outre, si  $G'_i$  est un quotient discret de  $\Pi_i$  (correspondant à un revêtement tempéré de  $S'_i$ ) c'est une extension  $G'_i$  d'un groupe libre par un quotient fini  $G'_{1,i}$  (qui correspond à un revêtement fini  $S'_i$ ), alors  $S''_i \rightarrow S'_i$  est un revêtement topologique ([2, th. III.2.1.9.a]).

Alors, d'après la proposition 1.2.2,  $\pi_1^{\text{temp}}(\tilde{X}_{i,\eta}) = \varprojlim_j \Pi_i/H_{i,j}$ , où  $(\Pi_i/H_{i,j})_j$  sont les quotients discrets de  $\pi_1^{\text{temp}}(X_{i,\eta})$  qui sont des extensions d'un groupe libre par un quotient fini de  $\pi_1^{\text{temp}}(X_{i,\eta})$  correspondant à un revêtement fini qui est non ramifié au-dessus de  $\tilde{X}_{i,\eta}$ . D'après le lemme 3.1.1, la famille  $(H_{2,j})_j$  est juste la famille  $(\phi(H_{1,j}))_j$ . Cela donne l'isomorphisme voulu.  $\square$

**Lemme 3.1.3.** *Soit  $x_1$  le point générique d'une composante irréductible de  $X_{1,s}$ , et  $x_2$  le point générique de la composante irréductible correspondante de  $X_{2,s}$  par  $\mathbb{G}_1^c \simeq \mathbb{G}_2^c$ . Soit  $x'_i$  le point correspondant du squelette de la fibre générique  $X_{i,\eta}$ . Alors  $\psi_{1,\eta}^{-1}(x'_1)$  et  $\psi_{2,\eta}^{-1}(x'_2)$  ont le même cardinal.*

*Démonstration.* Si  $X_{i,0}$  est une composante irréductible de  $X_{i,s}$ , soit  $Y_{i,0}$  une composante irréductible de  $Y_{i,s}$  qui s'envoie surjectivement sur  $X_{i,0}$ . Alors le morphisme entre les composantes des graphes de groupes  $\Pi_{Y_{i,0}}^{(p')} \rightarrow \Pi_{X_{i,0}}^{(p')}$  est ouvert (en particulier son image est non commutative) puisqu'il se plonge dans le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \text{Gal}(\overline{K(Y_{i,0})}/K(Y_{i,0})) & \hookrightarrow & \text{Gal}(\overline{K(X_{i,0})}/K(X_{i,0})) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Pi_{Y_{i,0}}^{(p')} & \longrightarrow & \Pi_{X_{i,0}}^{(p')} \end{array}$$

où la flèche du haut est une immersion ouverte et les flèches verticales sont des projections.

Puisque  $\Pi_{X_{i,0}}^{(p')} \rightarrow \Pi_i^{(p')}$  (définie à conjugaison près) est injectif, l'image de  $\Pi_{Y_{i,0}}^{(p')}$  dans  $\Pi_i^{(p')}$  (défini à conjugaison près) est non commutative, et donc  $\Pi_{X_{i,0}}^{(p')}$  est le seul sous-groupe verticiel de  $\Pi_i^{(p')}$  qui contient l'image de  $\Pi_{Y_{i,0}}^{(p')}$  (à conjugaison près).

De plus, si  $Y_{i,0}$  est une composante irréductible de  $Y_{i,s}$  qui ne s'envoie pas surjectivement sur une composante irréductible de  $X_{i,s}$ , l'image de  $\Pi_{Y_{i,0}}^{(p')}$  dans  $\Pi_i^{(p')}$  est commutative, donc le morphisme  $H_i \rightarrow \Pi_i$  détermine quelles composantes de  $Y_{i,s}$  s'envoient surjectivement sur une composante de  $X_{i,s}$ .

En particulier, si  $x_1$  et  $x_2$  sont les points génériques de composantes irréductibles de  $X_{1,s}$  et  $X_{2,s}$  se correspondant l'un l'autre, le nombre d'antécédents par  $Y_{i,s} \rightarrow X_{i,s}$  de  $x_i$  est indépendant de  $i$ .

Notons maintenant  $\pi$  l'application de spécialisation de la fibre générique (analytique) vers la fibre spéciale.  $x_i = \pi(x'_i)$  est le point générique d'une composante irréductible de  $X_\eta$ , toute préimage  $y_i$  de  $x_i$  par  $\psi_i$  est un point générique d'une composante irréductible de  $Y_\eta$ ,  $\pi^{-1}(y_i)$  est réduit à un unique élément par [4, th. 4.3.1.(i)], qui doit s'envoyer sur  $x'_i$  puisque  $\pi^{-1}(x_i) = \{x'_i\}$  d'après [4, th. 4.3.1.(i)]. Ainsi  $\psi_i^{\text{an},-1}(x'_i)$  est en bijection naturelle avec  $\psi_i^{-1}(x_i)$ .  $\square$

### 3.2 Cas de $\mathbf{P}^1 \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$

Soit  $i = 1$  ou  $2$ .

Soit  $z_{i,1}, \dots, z_{i,n} \in \mathbf{Q}_p^{\text{nr}}$ , avec  $n \geq 4$ .

Notons  $X_i := \mathbf{P}_{\mathbf{C}_p}^1 \setminus \{z_{i,1}, \dots, z_{i,n}\}$ .

Soit  $\Pi_i = \pi_1^{\text{temp}}(X_i)$ . Nous savons déjà qu'un isomorphisme  $\phi : \Pi_1 \simeq \Pi_2$  induit un isomorphisme entre les semi-graphes des réductions stables de  $\mathbf{P}^1 \setminus \{z_{1,1}, \dots, z_{1,n}\}$  et de  $\mathbf{P}^1 \setminus \{z_{2,1}, \dots, z_{2,n}\}$ . Quitte à réordonner les  $z_{2,j}$ , on peut supposer que ce morphisme de semi-graphes identifie le sous-groupe d'inertie (défini à conjugaison près) de  $z_{1,j}$  avec le sous-groupe d'inertie de  $z_{2,j}$ .

**Théorème 3.2.1.** *L'isomorphisme de graphes déterminé par  $\phi$  entre les squelettes de  $(\mathbf{P}^1 \setminus \{z_{1,1}, \dots, z_{1,n}\})^{\text{an}}$  et de  $(\mathbf{P}^1 \setminus \{z_{2,1}, \dots, z_{2,n}\})^{\text{an}}$  préserve les longueurs des arêtes (c'est-à-dire induit un isomorphisme de graphes métriques).*

De façon équivalente, pour tout  $(j_1, j_2, j_3, j_4)$ , on obtient une égalité entre les birapports suivants :

$$|(z_{1,j_1}, z_{1,j_2}, z_{1,j_3}, z_{1,j_4})| = |(z_{2,j_1}, z_{2,j_2}, z_{2,j_3}, z_{2,j_4})|.$$

En fait, nous prouverons ultérieurement ce résultat sans supposer  $z_{i,1}, \dots, z_{i,n} \in \mathbf{Q}_p^{\text{nr}}$ , après l'étude du cas des courbes elliptiques dans le cas  $p \neq 2$ , et sans hypothèses sur  $p$  après l'étude du cas des courbes de Mumford.

*Démonstration.* D'après le lemme 3.1.2, on peut supposer  $n = 4$ . On peut supposer, quitte à faire une homographie, que les points cuspidaux sont  $0, 1, \infty$  et  $\lambda_i$ . De plus, on peut supposer que  $X_i$  n'a pas bonne réduction (sinon il n'y a rien à prouver). Le cas de bonne réduction correspond à  $v_p(\lambda_i) = v_p(\lambda_i - 1) = 0$ . Quitte à permuter  $0, 1$  et  $\infty$  par une autre homographie, on peut supposer  $v_p(\lambda_i - 1) > 0$  (c'est un entier puisque  $\lambda \in \mathbf{Q}_p^{\text{nr}}$ ). Il nous faut donc prouver que  $v_p(\lambda_1 - 1) = v_p(\lambda_2 - 1)$ .

Supposons, par l'absurde, que  $v_p(\lambda_1 - 1) < v_p(\lambda_2 - 1)$ . Posons  $h := v_p(\lambda_2 - 1) - 1 \geq v_p(\lambda_1 - 1)$  et soit  $H_i$  le sous-groupe de  $\Pi_i$  d'indice  $p^h$  correspondant à l'unique revêtement connexe  $Y_i \rightarrow X_i$  de degré  $p^h$  ramifié seulement en  $0$  et  $\infty$  (c'est le morphisme  $z \mapsto z^{p^h}$  de  $\mathbf{P}^1$  vers  $\mathbf{P}^1$ ). On a  $\phi(H_1) = H_2$  grâce au lemme 3.1.1.

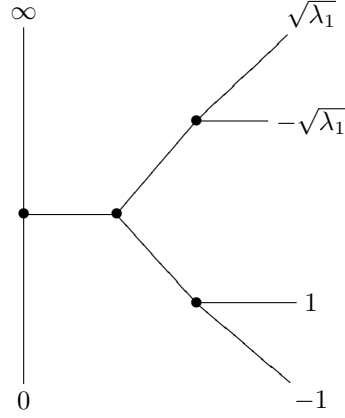
Mais d'après le lemme 3.0.3, le point  $B(1, r)$  de l'espace de Berkovich  $\mathbf{P}^1$  correspondant à la boule de rayon  $r$  et de centre  $1$  a  $p^{h-1}$  préimages si  $p^{-(h+\frac{1}{p-1})} \leq r < p^{-(h-1+\frac{1}{p-1})}$  et a  $p^h$  préimages si  $r < p^{-(h+\frac{1}{p-1})}$ .

Ainsi, si  $p \neq 2$ ,  $B(1, |\lambda_1 - 1|)$  a  $p^{h-1}$  préimages dans  $Y_1$  et  $B(1, |\lambda_2 - 1|)$  a  $p^h$  préimages dans  $Y_2$ , ce qui contredit le lemme 3.1.3.

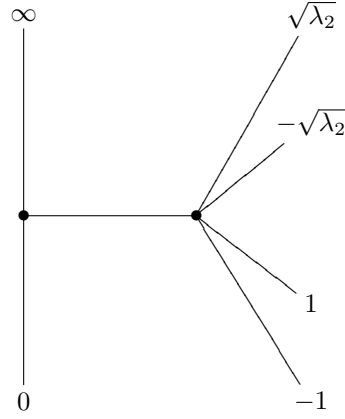
Dans le cas  $p = 2$  et  $h \geq 2$ ,  $B(1, |\lambda_1 - 1|)$  a  $2^{h-2}$  préimages dans  $Y_1$  et  $B(1, |\lambda_2 - 1|)$  a  $2^{h-1}$  préimages dans  $Y_2$ , ce qui contredit le lemme 3.1.3.

Si  $h = 1$ , et donc  $v_2(\lambda_1) = 1$  et  $v_2(\lambda_2) = 2$ , le semi-graphe de la réduction de

$Y_1 \rightarrow X_1$  est :



Le semi-graphe de la réduction stable de  $Y_2$  est



Les deux graphes ne sont pas isomorphes, et l'on obtient donc une contradiction.  $\square$

### 3.3 Cas d'une courbe elliptique épointée

Pour  $i = 1$  ou  $2$ , soit  $X_i$  une courbe de Tate épointée sur  $\mathbf{C}_p$  qui est définie sur une extension finie de  $\mathbf{Q}_p$ . On a un isomorphisme  $X_i = \mathbf{C}_p^*/q_i^{\mathbf{Z}} - \{1\}$  avec  $q_i \in \overline{\mathbf{Q}_p}^*$  et  $|q_i| < 1$ .  
Posons  $\Pi_i = \pi_1^{\text{temp}}(X_i)$ .

**Théorème 3.3.1.** *Si il existe un isomorphisme  $\phi : \Pi_1 \simeq \Pi_2$ , alors  $|q_1| = |q_2|$*

L'idée principale de la preuve est de considérer un  $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ -torseur sur  $\mathbf{G}_m = \mathbf{P}^1 \setminus \{0, \infty\}$  ( $\mathbf{G}_m$  est le revêtement topologique universel de la courbe elliptique) qui est ramifié en au plus deux points (et qui n'est pas ramifié ni en  $0$  ni en  $\infty$ ). Comme le torseur est décomposé au voisinage de  $0$  et de  $\infty$ , on peut recoller des "morceaux" de ce torseur pour le rendre périodique (ainsi on pourra le descendre en un  $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ -torseur d'un revêtement topologique fini). Nous utiliserons alors le lemme 3.0.3 comme dans le cas de la droite épointée.

Pour vérifier que les torseurs que nous aurons construits se correspondent bien l'un l'autre par  $\phi$  (à un torseur topologique et multiplication par une constante près), nous aurons à étudier le  $\mathbf{F}_p$ -espace vectoriel des torseurs de la courbe elliptique ramifiés en au plus deux points (fixés) : c'est un espace vectoriel de dimension 3. Une base sera obtenue en considérant un torseur topologique, le torseur que nous venons de décrire brièvement et un autre construit de façon similaire. En termes de courants (dont nous n'aurons pas besoin pour la preuve), on pourra dire que, si le torseur que nous aurons construit correspond au courant qui suit un chemin reliant les deux points cuspidaux, l'autre torseur correspond au courant suivant l'autre chemin reliant les deux points cuspidaux.

Nous n'aurons pas ici besoin de supposer  $q_i \in \mathbf{Q}_p^{\text{nr}}$  comme dans le cas de la droite époutée parce qu'en prenant un revêtement non ramifié de la courbe elliptique, on obtient autant de sommets sur le squelette de la courbe que l'on veut.

*Démonstration de 3.3.1.* Choisissons des entiers  $n, l$  et  $m$  tels que :

- $n$  soit premier à  $p$  et  $n \geq \frac{p-1}{p} \times \frac{v_p(q_2)v_p(q_1)}{|v_p(q_2)-v_p(q_1)|}$ ,
- $l \geq 1 + \frac{2np}{(p-1) \cdot v_p(q_i)}$ ,
- $m \geq \frac{2l}{n}$ .

Soit  $H_{i,0} = [\Pi_i, \Pi_i]\Pi_i^n$  la préimage dans  $\Pi_i$  de l'image par la multiplication par  $n$  dans l'abélianisé de  $\Pi_i$ .  $\phi$  induit un isomorphisme  $H_{1,0} \rightarrow H_{2,0}$ .

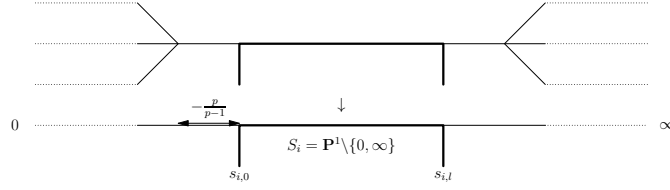
Le revêtement  $Y_{i,0}$  de  $X_i$  correspondant à  $H_i$  est la multiplication  $\bar{X}_i \xrightarrow{\times n} \bar{X}_i$  par  $n$  sur la courbe elliptique  $\bar{X}_i$ .

Soit maintenant  $H_{i,1}$  le sous-groupe de  $H_{i,0}$  correspondant à l'unique revêtement topologique connexe  $Y_{i,1}$  de degré  $n$  de  $Y_{i,0}$ . Alors  $Y_{i,1} = \mathbf{C}_p^*/q_i^{m\mathbf{Z}} - \{q_i^{\frac{a}{n}}\zeta^b\}_{(a,b) \in \mathbf{Z}^2}$  où  $q_i^{\frac{1}{n}}$  est une racine  $n^e$  de  $q_i$  et  $\zeta$  est une racine  $n^e$  de 1. Le semi-graphe de la réduction stable de  $Y_{i,1}$  a  $mn$  sommets qui sont disposés sur le squelette de  $\bar{Y}_{i,1} = \mathbf{C}_p^*/q_i^{m\mathbf{Z}}$  qui est homéomorphe à un cercle (la distance entre deux sommets consécutifs est  $v_p(q_i)/n$ ) et  $n$  points cuspidaux aboutissent à chaque sommet. L'isomorphisme  $\phi$  induit un isomorphisme  $H_{1,1} \simeq H_{2,1}$  qui lui-même induit un isomorphisme entre les semi-graphes de la réduction stable de  $Y_{i,1}$ . Numérotions de 0 à  $mn-1$  les sommets de ce graphe en suivant le cercle, de façon compatible avec l'isomorphisme induit par  $\phi$ . Notons  $x_{i,0}, \dots, x_{i,mn-1}$  les sommets correspondant du squelette de  $Y_{i,1}$ . Soient  $z_{1,0}$  et  $z_{1,l}$  deux points cuspidaux de  $Y_{1,1}$  aboutissant aux sommets du graphe numérotés 0 et  $l$  respectivement. Soient  $z_{2,0}$  et  $z_{2,1}$  les points cuspidaux correspondant de  $Y_{2,1}$ .

Concentrons-nous maintenant sur les  $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ -torseurs sur  $\bar{Y}_{i,1}$  qui sont ramifiés seulement en  $z_{i,0}$  et  $z_{i,l}$ . Ce sont les éléments de  $V_i := \text{Hom}(\pi_1^{\text{alg}}(\bar{Y}_{i,1} \setminus \{z_{i,0}, z_{i,l}\}), \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ .  $V_i$  est un groupe abélien sur lequel la multiplication par  $p$  est triviale : c'est un  $\mathbf{F}_p$ -espace vectoriel. Comme  $\pi_1^{\text{alg}}(\bar{Y}_{i,1} \setminus \{z_{i,0}, z_{i,l}\})$  est un groupe libre à 3 générateurs,  $V_i$  est de dimension 3 sur  $\mathbf{F}_p$ .

Rappelons que l'on a choisi  $m, n$  et  $l$  de manière à ce que  $\frac{l-1}{n}v_p(q_i) > \frac{2p}{p-1}$  et  $\frac{mn-l}{n}v_p(q_i) > \frac{l}{n}v_p(q_i)$ .

Décrivons maintenant une base de ce  $\mathbf{F}_p$ -espace vectoriel.



Soit  $S_i$  le revêtement topologique universel de  $\bar{Y}_{i,1}$ , que nous identifions à  $\mathbf{P}^1 \setminus \{0, \infty\} \subset \mathbf{P}^1$ . Soient  $s_{i,0}$  et  $s_{i,l}$  les seuls antécédents dans  $S_i$  de  $z_{i,0}$  et  $z_{i,l}$  de norme 1 et  $|q|^{\frac{l}{mn}}$  et soient  $U_{i,1} \subset S_i$  la couronne ouverte  $\{|q_i|^{\frac{l-mn}{2n}} > |z| > |q_i|^{\frac{l+mn}{2n}}\}$  et  $U_{i,2} \subset S_i$  la couronne ouverte  $\{|q_i|^{\frac{l}{n}} p^{-\frac{p}{p-1}} > |z| > |q_i|^m p^{\frac{p}{p-1}}\}$ . Les applications de  $U_{i,1}$  et de  $U_{i,2}$  vers  $\bar{Y}_{i,1}$  sont encore des immersions ouvertes, et ensemble recouvrent  $\bar{Y}_{i,1}$ .

Soit  $T_{i,1}$  la restriction à  $U_{i,1}$  du revêtement ramifié (seulement au-dessus de  $s_{i,0}$  et de  $s_{i,l}$ )  $\mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^1 : z \mapsto \frac{s_{i,0}z^p + s_{i,l}}{z^p + 1}$ , qui est galoisien de groupe isomorphe à  $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ , et choisissons un tel isomorphisme pour obtenir un  $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ -torseur. Soit  $T_{i,2}$  le  $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ -torseur trivial sur  $U_{i,2}$  et soit  $T_{i,3} = T_{i,1} \amalg T_{i,2} \rightarrow U_{i,3} = U_{i,1} \amalg U_{i,2}$ . Sur  $U_{i,1} \times_{\bar{Y}_{i,1}} U_{i,2}$  (qui a deux composantes connexes),  $T_{i,1}$  est trivial. Choisissons une trivialisation : on peut maintenant descendre  $T_{i,3} \rightarrow U_{i,3}$  en un  $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ -torseur  $T_i \rightarrow \bar{Y}_{i,1}$ , qui est ramifié seulement au-dessus de  $z_{i,0}$  et de  $z_{i,l}$ . D'après le lemme 3.0.3,  $T_i \rightarrow \bar{Y}_{i,1}$  est décomposé au-dessus de  $x_j$  (avec  $j \in [0, mn-1]$ ) si et seulement si  $|q_i|^{\frac{j}{n}} \in [|q_i|^m p^{\frac{p}{p-1}}, |q_i|^{\frac{l}{n}} p^{-\frac{p}{p-1}}]$ , c'est-à-dire

$$j \in I_{i,1} := \left[ l + \frac{np}{v_p(q_i)(p-1)}, mn - \frac{np}{v_p(q_i)(p-1)} \right].$$

Il existe un tel entier grâce à l'hypothèse faite sur  $l, m$  et  $n$  car

$$\lg(I_{i,1}) = mn - l - 2 \frac{np}{v_p(q_i)(p-1)} \geq 1$$

(où  $\lg$  est la longueur d'un intervalle).

De même, soit  $s'_{i,l}$  une préimage de  $z_{i,l}$  de norme  $|q|^{\frac{l-mn}{n}}$ . Soient  $U'_{1,i}$  la couronne  $\{|q_i|^{\frac{l-2mn}{2n}} > |z| > |q_i|^{\frac{l}{2n}}\}$  et  $U'_{2,i}$  la couronne  $\{p^{-\frac{p}{p-1}} > |z| > |q_i|^{\frac{mn-l}{n}} p^{\frac{p}{p-1}}\}$ . Ce sont des ouverts de  $\bar{Y}_{i,1}$ , qu'ils recouvrent.

Soit  $T'_{i,1}$  un  $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ -torseur sur  $U'_{1,i}$  obtenu comme la restriction d'un  $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ -torseur sur  $\mathbf{P}^1$  ramifié seulement au-dessus de  $z_{i,0}$  et de  $z'_{i,l}$ . Il est trivial au-dessus de  $U'_{i,1} \cap U'_{i,2}$ , et, en choisissant une telle trivialisation, on obtient par descente un  $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ -torseur  $T'_i$  sur  $\bar{Y}_{i,1}$ , ramifié seulement au-dessus de  $z_{i,0}$  et de  $z_{i,l}$ .  $T_i \rightarrow \bar{Y}_{i,1}$  est décomposé au-dessus de  $x_j$  (avec  $j \in [0, mn-1]$ ) si et seulement si  $|q_i|^{\frac{j}{n}} \in [|q_i|^{\frac{l}{n}} p^{\frac{p}{p-1}}, p^{-\frac{p}{p-1}}]$ , c'est-à-dire

$$j \in I_{i,2} := \left[ \frac{np}{v_p(q_i)(p-1)}, l - \frac{np}{v_p(q_i)(p-1)} \right].$$

Il existe un tel entier grâce à l'hypothèse faite sur  $l, m$  et  $n$  car

$$\lg(I_{i,2}) = l - 2 \frac{np}{v_p(q_i)(p-1)} \geq 1.$$

Soit finalement  $T''_i$  le revêtement topologique connexe (unique à isomorphisme près) de degré  $p$  de  $\bar{Y}_i$ , et fixons un isomorphisme de  $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$  sur son groupe de

Galois, pour le considérer comme un  $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ -torseur. Montrons qu'alors  $T_i, T'_i$ , et  $T''_i$  constituent une base de  $V_i$ .

Soit  $i$  un entier dans  $I_{i,1}$ . Comme  $I_{i,1} \cap I_{i,2} = \emptyset$  et comme  $T''$  est partout décomposé, si  $aT_i + bT'_i + cT''_i$  (la combinaison linéaire est à prendre au sens de l'espace vectoriel  $V_i$ ) est décomposé en  $x_j$ ,  $c = 0$ . Par un même argument avec  $I_{i,2}$ , si  $aT_i + bT'_i + cT''_i = 0$ , on obtient  $b = 0$ , mais comme  $T_i$  n'est pas trivial non plus, on obtient en fait que  $T_i, T'_i$  et  $T''_i$  constituent une base de  $V_i$ .

Supposons maintenant, par l'absurde, que  $|q_1| > |q_2|$ , alors  $I_{1,1} \subset I_{2,1}$ .

Soit  $T_{2,0} = aT_2 + bT'_2 + cT''_2$  l'image de  $T_1$  par  $(\phi^{-1})^* : V_1 \rightarrow V_2$  (en effet,  $\phi$  induit un tel  $(\phi^{-1})^*$  grâce au lemme 3.1.1).

Soit  $j \in I_{1,1}$ ,  $T_1$  est décomposé au-dessus de  $x_{1,j}$ , donc d'après le lemme 3.1.3,  $T_{2,0}$  est décomposé au-dessus de  $x_{2,j}$ , et donc  $c = 0$ . Alors,  $T_{2,0}$  est décomposé au-dessus de chaque  $x_j$  si  $b = 0$  ou précisément au-dessus des  $x_j$  tels que  $j \in I_{2,1}$  sinon.

Or, d'après le lemme 3.1.3,  $T_{2,0}$  doit être décomposé précisément au-dessus  $x_{2,j}$  tel que  $T_1$  est décomposé au-dessus de  $x_{1,j}$ , c'est-à-dire  $j \in I_{1,1}$ .

Ainsi le cas  $b = 0$  est impossible et  $I_{2,1}$  et  $I_{1,1}$  doivent contenir exactement les mêmes entiers.

Mais ce n'est pas possible si  $n \geq \frac{v_p(q_2)v_p(q_1)(p-1)}{(v_p(q_2)-v_p(q_1))p}$ , car

$$\lg(I_{2,1}) - \lg(I_{1,1}) = 2 \frac{np}{v_p(q_1)(p-1)} - 2 \frac{np}{v_p(q_2)(p-1)} \geq 2.$$

□

*Remarque.* Supposons  $p \neq 2$ . Soit  $\{z_{i,1}, \dots, z_{i,4}\}$  quatre éléments de  $\overline{\mathbf{Q}}_p$ , et soit  $\phi$  un isomorphisme entre les  $\pi_1^{\text{temp}}(\mathbf{P}^1 \setminus \{z_{i,1}, \dots, z_{i,4}\})$  pour  $i = 1, 2$ , qui identifie  $z_{1,j}$  à  $z_{2,j}$  par l'identification des points cuspidaux des graphes des réductions stables (nous supposons les courbes ayant mauvaise réduction, et la longueur des arêtes du graphe égale à  $l_i$ ). Soit  $E_i$  l'unique  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ -torseur de  $\mathbf{P}^1$  ramifié au-dessus de  $\{z_{i,1}, \dots, z_{i,4}\}$  et seulement au-dessus de ces points (les sous-groupes d'indice 2 correspondant aux  $E_i$  s'envoient donc l'un sur l'autre).  $E_i$  est une courbe de Tate avec  $|q_i| = 2l_i$ . D'après le théorème 3.3.1,  $|q_1| = |q_2|$  donc  $l_1 = l_2$ , ce qui prouve encore le théorème 3.2.1 sans supposer que les points soient dans  $\mathbf{Q}_p^{\text{nr}}$ .

Si  $p = 2$  et  $l_i > 4$ , alors  $E_i$  est aussi une courbe de Tate,  $|q_i| = 2l_i - 8$  et l'argument précédent fonctionne également.

## 3.4 Cas d'une courbe de Mumford

### 3.4.1 Rappels sur les courbes de Mumford et les courants

Soit  $X$  une courbe de Mumford de genre  $g \geq 2$  sur  $\overline{K}$ , soit  $\Omega \subset \mathbf{P}^1$  son revêtement topologique universel, et  $\Gamma = \text{Gal}(\Omega/X)$ . Ainsi  $X = \Omega/\Gamma$ .

Soit  $\Phi$  la rétraction de  $\Omega$ , comme espace de Berkovich, sur son squelette  $\mathbb{T} = \mathbb{T}(\Omega)$ .

Pour  $z, z' \in \Omega$ , posons

$$d_\Omega(z, z') = \sup_{x_1, x_2 \in \mathbf{P}^1 \setminus \Omega} |v_p(\frac{z' - x_1}{z - x_1} \frac{z - x_2}{z' - x_2})|,$$

distance qui est invariante par homographie. De plus  $d(z, z')$  dépend uniquement de  $\Phi(z)$  et  $\Phi(z')$ , et ce n'est rien d'autre que la distance entre  $\Phi(z)$  et  $\Phi(z')$  pour la métrique usuelle  $d$  sur l'arbre de  $\Omega$ . Ainsi  $d_\Omega(z, z') = d(\Phi(z), \Phi(z'))$ . Si  $z \in \Omega$  et  $\lambda > 0$ , notons  $U_{z,\lambda} := \{z' \in \Omega \mid d_\Omega(z, z') \leq \lambda\}$ . C'est un sous-espace affinoïde de  $\Omega$  (c'est une intersection de disques fermés).

Soit  $\mathcal{L} = \mathbf{P}^1 \setminus \Omega$ , c'est un compact de  $\mathbf{P}^1$ . Il est constitué de points de  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$  qui est totalement discontinu, donc  $\mathcal{L}$  est aussi totalement discontinu, donc profini. Dans [13, 1.8.9], Fresnel et van der Put définissent une *mesure* sur un espace topologique profini  $Z$  comme étant une fonction  $\mu : \{\text{ouverts compacts de } Z\} \rightarrow \mathbf{Z}$  telle que  $\mu(U_1 \cup U_2) + \mu(U_1 \cap U_2) = \mu(U_1) + \mu(U_2)$  pour tous ouverts compacts  $U_1, U_2$  de  $Z$ . Le groupe des mesures sur  $Z$  telles que  $\mu(Z) = 0$  est noté  $M_0(Z)$ . On peut alors associer à  $f \in O(\Omega)^*$  une mesure  $\mu_f$  sur  $\mathcal{L}$ . En suivant [13], on appellera aussi trou d'un sous-espace affinoïde  $U$  de  $\mathbf{P}^1$  toute composante connexe du complémentaire de cet affinoïde, et nous noterons  $t(U)$  l'ensemble des trous de  $U$ .

On a une suite exacte ([13, Prop. 1.8.9]) :

$$1 \rightarrow \overline{K}^* \rightarrow O(\Omega)^* \rightarrow M_0(\mathcal{L}) \rightarrow 0$$

Plus précisément, d'après [13, 1.8.10 ex.  $\beta$ ], si  $a, b \in \mathcal{L}$  et  $f : z \mapsto \frac{z-a}{z-b}$ , alors on a  $\mu_f = \delta_a - \delta_b$ . En général, si  $f \in O(\Omega)^*$  et  $\mu = \mu_f$ ,  $\mu$  est une limite faible de  $\mathbf{Z}$ -combinaisons linéaires  $(\mu_k)_{k \in \mathbf{N}}$  de mesures de Dirac. Si  $\mu_k = \sum n_i(k) \delta_{a_i(k)}$ , soit  $f_k = \prod (1 - \frac{a_i(k)}{z})^{n_i(k)}$ . Alors  $\mu_{f_k} = \mu_k$ , et  $(f_k)$  tend uniformément sur tout affinoïde vers  $g$ . Alors  $\mu_g = \mu$  et donc  $g = \lambda f$  avec  $\lambda \in \overline{K}^*$ .

Un courant  $C$  sur un graphe  $\mathbb{G}$  à coefficient dans un groupe abélien  $A$  est une fonction de l'ensemble des branches de  $\mathbb{G}$ , telle que :

- pour toute arête  $e$ ,  $C(b_1) = -C(b_2)$ , où  $b_1$  et  $b_2$  sont les branches de  $e$  ;
- pour tout sommet  $v$ ,  $\sum_b C(b) = 0$  où la somme porte sur toutes les branches  $b$  aboutissant en  $v$ .

Notons  $C(\mathbb{G})$  est le groupe des courants à coefficients entiers sur  $\mathbb{G}$ . D'après [42, prop. 1.1], on a la suite exacte suivante :

$$1 \rightarrow \overline{K}^* \rightarrow O(\Omega)^* \rightarrow C(\mathbb{T}) \rightarrow 0$$

qui donne, par comparaison avec la suite précédente, un isomorphisme  $M_0(\mathcal{L}) \rightarrow C(\mathbb{T})$ .

On peut décrire cet isomorphisme de la façon suivante : si  $e$  est une arête orientée de  $\mathbb{T}$ ,  $\mathbf{P}^1 \setminus \Phi^{-1}(e)$  a deux composantes connexes, et  $\Phi^{-1}(e) \cap \mathcal{L} = \emptyset$ , d'où une partition de  $\mathcal{L}$  par deux ouverts,  $\mathcal{L}_1(e)$  au départ de  $e$  et  $\mathcal{L}_2(e)$  à l'arrivée de  $e$  (on a pour  $\mu \in M_0(\mathcal{L})$ ,  $\mu(\mathcal{L}_1(e)) = -\mu(\mathcal{L}_2(e))$ ). Alors  $\mathcal{C}(e) = \mu(\mathcal{L}_2(e))$ .

Plus généralement, si  $\mathbb{K}$  est un sous-graphe fini connexe de  $\mathbb{T}$  (contenant au moins une arête),  $\Phi^{-1}(\mathbb{K})$  est un affinoïde contenu dans  $\Omega$ . Il y a une bijection naturelle entre  $t(\Phi^{-1}(\mathbb{K}))$  et l'ensemble des arêtes de  $\mathbb{T}$  ayant exactement une extrémité dans  $\mathbb{K}$ . Si  $\mu \in M_0(\mathcal{L})$ ,  $C \in t(\Phi^{-1}(\mathbb{K}))$  et  $e$  est l'unique arête orientée de  $\mathbb{T}$  partant de  $\mathbb{K}$  correspondant à  $C$ , alors  $C \cap \mathcal{L} = \mathcal{L}_2(e)$  et donc  $\mathcal{C}(e) = \mu(C \cap \mathcal{L})$ . En particulier  $\mu(C \cap \mathcal{L}) = 0$  pour tout  $C \in t(\Phi^{-1}(\mathbb{K}))$  si et seulement si  $\mathcal{C}(e) = 0$  pour toute arête terminale partant de  $\mathbb{K}$ , si et seulement si  $\mathcal{C}$  est nul l'étoile  $\widetilde{\mathbb{K}}$  de  $\mathbb{K}$  (l'étoile de  $\mathbb{K}$  est par définition l'ensemble des arêtes

ayant une extrémité dans  $\mathbb{K}$ ).

Soit  $\Theta$  le groupe des fonctions thêta de  $X$ , c'est-à-dire le sous-groupe des fonctions  $f \in O(\Omega)^*$  telles que pour tout  $\gamma \in \Gamma$ ,  $z \mapsto f(\gamma z)/f(z)$  est une fonction constante (cela signifie que le courant correspondant, ou de manière équivalente la mesure correspondante, est  $\Gamma$ -équivariant). Alors on a la suite exacte suivante :

$$1 \rightarrow \overline{K}^* \rightarrow \Theta \rightarrow C(\mathbb{G}) \rightarrow 0$$

où  $\mathbb{G} = \mathbb{T}/\Gamma$  est le graphe de la réduction stable de  $X$ .

et donc  $\Theta/\overline{K}^*$  est un  $\mathbf{Z}$ -module libre de rang  $g$ .

Le résultat suivant est inspiré de [41, prop. 2.1] :

**Proposition 3.4.1.** *Pour tout  $n \geq 2$  et tout  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ -torseur  $Y$  sur  $X$ , il existe un élément  $\theta$  dans  $\Theta$ , unique modulo  $\overline{K}^* \Theta^n$ , tel que  $Y \times_X \Omega = \Omega[f]/(f^n = \theta)$  où  $\Omega[f]/(f^n = \theta)$  est le pullback du  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ -torseur  $\mathbf{G}_m \xrightarrow{z \mapsto z^n} \mathbf{G}_m$  le long de  $\Omega \xrightarrow{\theta} \mathbf{G}_m$ .*

*Réciproquement, pour tout  $\theta$  dans  $\Theta$ , il existe un  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ -torseur  $Y$  sur  $X$  tel que  $Y \times \Omega = \Omega[f]/(f^n = \theta)$ .*

*Démonstration.* Nous suivons les notations de [41, section 2]. Soit  $\Omega_*$  une composante connexe de  $Y \times_X \Omega$ .

Supposons d'abord  $Y \times_X \Omega$  connexe. Ainsi  $\Omega_* = Y \times_X \Omega$ . Alors, d'après [41, prop. 2.1], il existe un unique réseau  $T$  dans  $(\Theta/\overline{K}^*) \otimes \mathbf{Q}$  contenant  $\Theta/\overline{K}^*$  tel que, comme revêtement de  $X$ ,  $\Omega_* = \Omega(T) := \Omega \times_{\text{Spec } \overline{K}[\Theta/\overline{K}^*]} \text{Spec } \overline{K}[T]$ . Alors  $T/(\Theta/\overline{K}^*)$  est isomorphe à  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ , et choisir un générateur  $\bar{f}$  de  $T/(\Theta/\overline{K}^*)$  revient à choisir une structure de  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ -torseur sur  $\Omega_*$ .

Si l'on prend  $\bar{f}^i$  (avec  $i \in (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^*$ ) comme autre générateur, le toseur correspondant est  $i \cdot \Omega_*$  (pour la structure de  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ -module sur l'ensemble des  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ -torseurs). Ainsi en changeant de générateur, on obtient les  $\phi(n)$  structures distinctes de  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ -torseur sur le revêtement  $\Omega_*$  de  $\Omega$ .

Si  $\bar{f}$  est le générateur correspondant à la structure de  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ -torseur sur  $\Omega_* = Y \times_X \Omega$  héritée de celle de  $Y$ , alors  $\theta$  est n'importe quel relèvement de  $\bar{f}^n \in T^n/(\Theta/\overline{K}^*)^n$ .

Dans le cas général,  $\Omega_*$  acquiert la structure de  $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ -torseur sur  $\Omega$  pour  $m|n$  convenable, et comme précédemment, on obtient un unique  $\theta_0$  modulo  $\overline{K}^* \Theta^m$  tel que  $\Omega_* = \Omega[f]/(f^m = \theta_0)$ . Alors  $Y \times_X \Omega = \text{Ind}_{\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}}^{\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}} \Omega_*$ , et ainsi  $Y \times_X \Omega = \Omega[f]/(f^n = \theta_0^{n/m})$  et  $\theta = \theta_0^{n/m}$ .

La seconde assertion découle du fait que si  $\Omega_*$  est une composante connexe de  $\Omega[f]/(f^n = \theta)$ , alors  $\text{Gal}(\Omega_*/X)$  est (non canoniquement) isomorphe au produit direct de  $\text{Gal}(\Omega_*/\Omega)$  et  $\Gamma$  (d'après [41, section 2, intro.]). Ainsi  $\Omega_*$  se descend (non canoniquement) à  $X$  en considérant  $Y_0 = \Omega_*/N$  où  $N$  est un complément de  $\text{Gal}(\Omega_*/\Omega)$  dans  $\text{Gal}(\Omega_*/X)$  (et alors  $Y \times \Omega = \Omega[f]/(f^n = \theta)$  où  $Y$  est une somme disjointe de copies de  $Y_0$ ).  $\square$

*Remarque.* On peut aussi montrer cela en considérant l'homomorphisme  $\tilde{J} = \mathcal{H}om(\Theta/\overline{K}^*, \mathbf{G}_m) \rightarrow J$  où  $J$  est la jacobienne de  $X$  et  $\tilde{J}$  est son revêtement topologique universel.



Plus précisément, le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \tilde{J} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & J \end{array}$$

induit un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \text{Tors}(\Omega, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) & \longleftarrow & \text{Tors}(\tilde{J}, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) = \Theta/\overline{K}^* \Theta^n \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{Tors}(X, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) & \longleftarrow & \text{Tors}(J, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \end{array}$$

La première assertion de la proposition découle alors du fait que la flèche du bas soit un isomorphisme et la seconde assertion du fait que la flèche de droite soit surjective (ce qui se déduit du fait que  $\pi_1^{\text{alg}}(\tilde{J})$  soit un facteur direct de  $\pi_1^{\text{alg}}(J)$ ).

### 3.4.2 Résultats préliminaires sur la décompositions des torseurs correspondant aux courants

Rappelons que  $U_{z,\lambda}$  désigne le sous-espace affinoïde  $\{z' | d(z, z') \leq \lambda\}$  de  $\Omega$ .

**Proposition 3.4.2.** *Soit  $z \in \Omega, \lambda > 0$ . Soit  $f \in O(\Omega)^*$  tel que  $f(z) = 1$ . Soit  $\mu$  la mesure sur  $\mathcal{L}$  correspondant à  $f$  et supposons  $\mu(C \cap \mathcal{L}) = 0$  pour tout trou  $C$  de  $U_{z,\lambda}$ .*

*Alors  $\forall z' \in U_{z,\lambda}, |f(z') - 1| \leq p^{d(z,z')-\lambda}$*

*Démonstration.* Pour simplifier, supposons  $z = \infty$ .

D'après [13, 1.8.10 ex.  $\beta$ ] et [13, prop. 1.8.9.(i)], on a  $f = \lim f_k$  uniformément sur tout affinoïde de  $\Omega$  (en particulier sur  $U_{z,\lambda}$ ) où  $f_k$  est de la forme suivante

$$f_k(z') = \prod_{i=1}^{s_k} \left(1 - \frac{x_{i,k}}{z'}\right)^{n_{i,k}},$$

et  $\mu_k = \sum_i n_{i,k} \delta_{a_i(k)} \rightarrow \mu$ .

Pour  $k$  assez grand, on a  $\mu_k(C \cap \mathcal{L}) = 0$  pour tout trou  $C$  de  $U_{z,\lambda}$  et  $|f - f_k|_{U_{z,\lambda}} \leq p^{-\lambda}$ .

Il suffit donc de prouver le résultat pour  $f_k$ , qui est un produit de fonctions de la forme  $g : z' \mapsto z' = (1 - \frac{x_1}{z'})(1 - \frac{x_2}{z'})^{-1} = \frac{z' - x_1}{z' - x_2}$  avec  $x_1$  et  $x_2$  dans le même trou  $C$  de  $U_{z,\lambda}$ . Nous n'avons qu'à montrer le résultat pour  $g$ , ce qui se voit aisément.  $\square$

Si  $x$  et  $x'$  sont deux points de la réalisation géométrique  $|\mathbb{T}_0|$  d'un arbre  $\mathbb{T}_0$ , l'ensemble des parties connexes de  $|\mathbb{T}_0|$  qui contiennent  $x$  et  $x'$  admet un minimum pour l'inclusion. Il est noté  $[x, x']$ .

**Corollaire 3.4.3.** *Soit  $f \in O(\Omega)^*$  telle que  $f(z) = 1$ . Soit  $U$  un affinoïde de  $\Omega$  tel que pour tout trou  $C$  de  $U$ ,  $\mu(C \cap \mathcal{L}) = 0$ .*

*Supposons que pour tout  $z'' \in \Phi^{-1}([\Phi(z), \Phi(z')])$ ,  $U_{z'',\lambda} \subset U$ .*

*Alors  $|f(z') - 1| \leq p^{-\lambda}$ .*

*Démonstration.* Soit  $\epsilon > 0$ . Soit  $(z_i)_{i=0\dots n}$  une suite telle que  $z_0 = z$ ,  $z_n = z'$ ,  $\Phi(z_i) \in [\Phi(z), \Phi(z')]$  et  $d(\Phi(z_i), \Phi(z_{i+1})) \leq \epsilon$ . Par hypothèse, on a  $U_{z_i, \lambda} \subset U$ . Donc, pour tout trou de  $U_{z_i, \lambda}$ ,  $C \cap \mathcal{L} = \coprod_i C_i \cap \mathcal{L}$  où l'union est sur tous les trous  $C_i$  de  $U$  qui sont contenu dans  $C$ . Ainsi,  $\mu(C \cap \mathcal{L}) = 0$  pour tout trou de  $U_{z_i, \lambda}$ . Comme  $z_{i+1} \in U_{z_i, \lambda}$ , la proposition précédente nous donne  $|\frac{f(z_{i+1})}{f(z_i)} - 1| \leq p^{\epsilon - \lambda}$ . Ainsi  $|f(z'') - 1| \leq \sup |f(z_{i+1}) - f(z_i)| \leq p^{\epsilon - \lambda}$ . On obtient le résultat en faisant tendre  $\epsilon$  vers 0.  $\square$

**Corollaire 3.4.4.** *Soit  $f$  comme précédemment,  $U$  tel que  $\mu(C \cap \mathcal{L}) = 0$  pour tout trou  $C$  de  $U$ . Soit  $e$  un entier positif. Soit  $\lambda > e + \frac{1}{p-1}$ , soit  $Y \rightarrow \Omega$  un revêtement fini obtenu par pullback de  $\mathbf{G}_m \xrightarrow{z \mapsto z^{p^e}} \mathbf{G}_m$  le long de  $f : \Omega \rightarrow \mathbf{G}_m$ . Soit  $V \subset U$  tel que  $\forall z \in V, U_{z, \lambda} \subset U$ . Alors  $Y$  est scindé sur  $V$ .*

*Démonstration.* On peut supposer  $V$  connexe, car il suffit de prouver le résultat pour toute composante connexe de  $V$ . Soit  $z \in V$ . Quitte à multiplier  $f$  par une constante, ce qui ne modifie pas  $Y$ , on peut supposer  $f(z) = 1$ .

D'après le corollaire précédent,  $f(V) \subset D(1, p^{-\lambda})$ . Mais selon 3.0.3,  $\mathbf{G}_m \xrightarrow{z \mapsto z^{p^e}} \mathbf{G}_m$  est décomposé sur  $D(1, p^{-\lambda})$ , ce qui prouve le résultat.  $\square$

En particulier, supposons que  $\mathbb{K}$  et  $\mathbb{K}'$  sont des sous-graphes de  $\mathbb{T}$  tels que  $\{z \in \mathbb{T} | d(z, K) \leq \lambda\} \subset \mathbb{K}'$  pour un certain  $\lambda > e + \frac{1}{p-1}$ , et que  $\mathcal{C}$  est un courant sur  $\mathbb{T}$  nul sur l'étoile de  $\mathbb{K}'$ . Alors  $V = \phi^{-1}(|\mathbb{K}|)$  et  $U = \phi^{-1}(|\mathbb{K}'|)$  sont affinoïdes ;  $\mu_{\mathcal{C}}(C \cap L) = 0$  pour tout trou de  $U$ , et donc le corollaire précédent implique que le  $\mathbf{Z}/p^e\mathbf{Z}$ -torseur associé à  $\mathcal{C}$  est scindé sur  $V$  (et donc a fortiori totalement décomposé sur  $\mathbb{K}$ ).

**Proposition 3.4.5.** *Soit  $\mathcal{C}$  un courant sur le squelette  $\mathbb{T} := \mathbb{T}(\Omega)$ , correspondant à une fonction inversible  $f$  sur  $\Omega$ . Soit  $a$  un sommet de  $\mathbb{T}$  telle que la restriction  $\mathcal{C}_a$  de  $\mathcal{C}$  à l'étoile de  $a$  soit non nulle modulo  $n$ . Alors, si  $Y \rightarrow \Omega$  est le pullback de  $\mathbf{G}_m \xrightarrow{z \mapsto z^n} \mathbf{G}_m$  le long de  $f : \Omega \rightarrow \mathbf{G}_m$ ,  $Y \rightarrow \Omega$  n'est pas totalement décomposé en  $a$ .*

*Démonstration.* Le revêtement  $Y \rightarrow \Omega$  est décomposé en  $a$  si et seulement si il existe  $f_1 \in \mathcal{O}_{\Omega, a}$  telle que  $f_1^n = f|_{\mathcal{O}_{\Omega, a}}$ . Quitte à multiplier  $f$  par une constante, on peut supposer  $|f|_a = 1$ .

Si  $f_1$  existe, en regardant le corps résiduel  $\tilde{k}_{\Omega, a} \simeq \tilde{k}(X)$ ,  $\tilde{f}_1^n = \tilde{f}$ . Si  $\tilde{f}_1(z) = \lambda \prod (z - a_i)$ ,  $\tilde{f} = \lambda^n \prod (z - a_i)^n$ , et donc tous les zéros et pôles de  $\tilde{f}$  sont d'ordre multiple de  $n$ , ce qui conclut la preuve.  $\square$

### 3.4.3 Graphe métrique de la réduction stable et groupe fondamental tempéré

Supposons maintenant que  $X_1$  et  $X_2$  soient deux  $\overline{K}$ -courbes de Mumford définies sur  $K$  (pour que l'on puisse utiliser le théorème 1.2.5, qui suppose que les courbes sont déjà définies sur un corps à valuation discrète), et que l'on ait un isomorphisme

$$\phi : \pi_1^{\text{temp}}(X_1) = \pi_1^{\text{temp}}(X_2),$$

qui induit donc un isomorphisme de graphes

$$\mathbb{G}_1 \rightarrow \mathbb{G}_2,$$

d'où un isomorphisme  $\mathbb{T}(\Omega_1) \simeq \mathbb{T}(\Omega_2)$ .

**Théorème 3.4.6.** *L'isomorphisme  $\mathbb{G}_1 \rightarrow \mathbb{G}_2$  de graphes est en fait un isomorphisme de graphes métriques.*

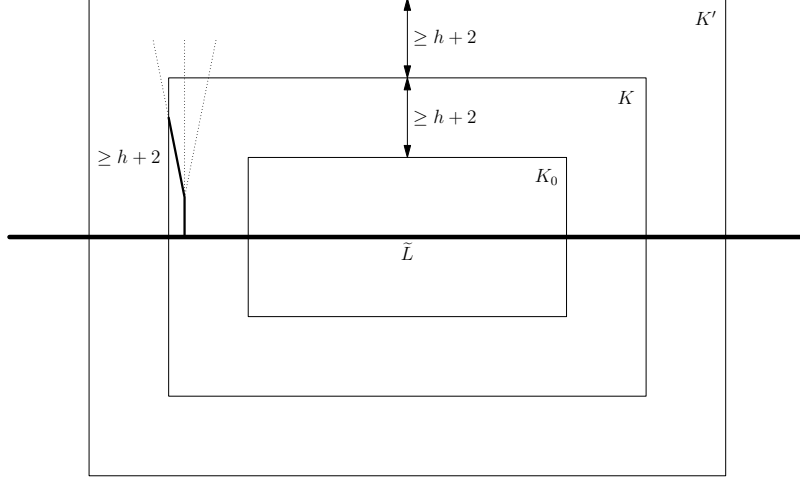
*Remarque.* Supposons que  $X_1$  et  $X_2$  soient des droites projectives privées de quatre points  $a_i, b_i, c_i, d_i$  avec  $h_i := v_p(a_i, b_i, c_i, d_i) > 0$  et que l'on ait un isomorphisme  $\phi$  entre leurs groupes fondamentaux tempérés. Soit  $l > 2$  un nombre premier autre que  $p$ . On peut considérer un revêtement galoisien  $X'_1$  d'ordre  $l$  de  $X_1$  tel que la restriction à chaque composante irréductible de la réduction stable soit connexe mais tel que  $X'_1$  soit totalement décomposé au-dessus du point double de la réduction (et soit  $X'_2$  le revêtement de  $X_2$  correspondant à  $X'_1$  par  $\phi$ , il vérifie les mêmes propriétés). Alors  $\bar{X}'_i$  est une courbe de Mumford (le revêtement correspondant de chaque composante irréductible de la réduction stable de  $X_i$  est ramifié en au plus deux points, donc c'est un revêtement par une droite projective) dont l'arbre a  $l$  arêtes, chacune de longueur  $h_i$ . Ainsi d'après le théorème 3.4.6  $h_1 = h_2$ , ce qui clôt le cas de la droite épointée.

Commençons par donner une esquisse de la preuve de 3.4.6. Fixons deux points terminaux du squelette  $\mathbb{T} := \mathbb{T}(\Omega_1) \simeq \mathbb{T}(\Omega_2)$ . Les points correspondants de  $\mathbf{P}^1 \setminus \Omega_i$  joueront le rôle de 0 et  $\infty$ . Etant donné un sous-arbre fini  $\mathbf{K}_0$  de  $\mathbb{T}$ , Nous construirons un  $\mathbf{Z}/p^h\mathbf{Z}$ -torseur  $\tilde{X}''_1$  sur  $\Omega_1$  se descendant à un revêtement topologique fini de  $X_1$  qui, restreint à  $\Phi_1^{-1}(\mathbf{K}_0)$ , soit isomorphe à la restriction à  $\Omega_1$  de  $\mathbf{G}_m \xrightarrow{z \mapsto z^{p^h}} \mathbf{G}_m$  et tel que le torseur  $\tilde{X}''_2$  sur  $\Omega_2$  correspondant à  $\tilde{X}''_1$  par  $\phi$  (ce qui a un sens car  $\tilde{X}''_1$  est défini sur un revêtement fini de  $X_1$ ) soit aussi isomorphe à un multiple (pour la structure de  $\mathbf{Z}/p^h\mathbf{Z}$ -modules sur l'ensemble des  $\mathbf{Z}/p^h\mathbf{Z}$ -torseurs) de  $\mathbf{G}_m \xrightarrow{z \mapsto z^{p^h}} \mathbf{G}_m$ . Nous obtiendrons alors l'égalité des deux distances sur  $\mathbb{T}(\Omega_1) \simeq \mathbb{T}(\Omega_2)$  en appliquant le lemme 3.0.3 et le résultat combinatoire 3.4.8.

Pour ce faire, considérons le courant  $\mathbf{C}_0$  sur  $\mathbb{T}$  longeant la ligne liant 0 à  $\infty$  et rendons le invariant par un sous-groupe d'indice fini  $\Gamma'$  de  $\Gamma := \text{Gal}(\mathbb{T}/\mathbb{G})$  (pour cela, il faudra rajouter comme hypothèse sur la ligne 0 à  $\infty$  d'être stabilisée par un sous-groupe non trivial de  $\text{Gal}(\mathbb{T}/\mathbb{G})$ ), pour qu'il induise un  $\mathbf{Z}/p^h\mathbf{Z}$ -torseur sur un revêtement topologique fini de  $X_1$ ;  $\tilde{X}''_1$  sera alors son pullback à  $\Omega_1$ . Nous choisirons  $\Gamma'$  pour que le courant ainsi défini  $\mathbf{C}_1$  coïncide avec  $\mathbf{C}_0$  sur un sous-graphe  $K'$  de  $\mathbb{T}$  suffisamment grand par rapport  $K_0$ .

Alors, en utilisant les lemmes du paragraphe précédent,  $\tilde{X}''_1$  sera isomorphe à  $\mathbf{G}_m \xrightarrow{z \mapsto z^{p^h}} \mathbf{G}_m$  sur un sous-graphe  $K$  de  $K'$  mais encore assez grand par rapport à  $K_0$ . Les lemmes 3.0.3 et 3.1.3 permettent alors de déterminer en quels sommets de  $K$   $\tilde{X}''_1$  et  $\tilde{X}''_2$  seront décomposés. En particulier, en choisissant  $K'$  de façon appropriée, nous pourrons nous arranger pour que  $\tilde{X}''_i$  soit totalement décomposé en tous les sommets de la frontière de  $K$  autre que ceux sur la ligne reliant 0 à  $\infty$ . Le courant  $\mathbf{C}_2$  correspondant à  $\tilde{X}''_2$  sera alors nul en tous ces points frontières et sera donc égal sur  $K$  à un multiple de  $\mathbf{C}_0$ . Si  $K$  était assez grand par rapport à  $K_0$ ,  $\tilde{X}''_2$  sera donc isomorphe à un multiple (pour la

structure de  $\mathbf{Z}/p^h\mathbf{Z}$ -module de l'ensemble des  $\mathbf{Z}/p^h\mathbf{Z}$ -torseurs) de la restriction de  $\mathbf{G}_m \xrightarrow{z \mapsto z^{p^h}} \mathbf{G}_m$ , comme souhaité.



*Démonstration de 3.4.6.* Un *cycle* d'un graphe est une suite cyclique d'arêtes orientées du graphe telle que le but d'une arête coïncide avec la source de l'arête suivante, et qui ne repasse jamais par le même sommet ou par la même arête (non orientée).

Soit  $C$  un cycle du graphe  $\mathbb{G}$ , et notons  $\lg_i(C)$  la longueur de  $C$  pour la métrique  $d_i$  sur  $\mathbb{G}$ . Soit  $\tilde{C}$  le revêtement universel de  $C$ , soit  $\tilde{C} \rightarrow \mathbb{T}$  un relèvement de  $\tilde{C} \rightarrow \mathbb{G}$  et soit  $z_0$  un sommet de  $\mathbb{T}$  qui appartient à  $\tilde{C}$ , numérotons alors les sommets  $(z_j)_{j \in \mathbf{Z}}$  de  $\tilde{C}$  ayant la même image que  $z_0$  dans  $\mathbb{G}$ . Soit  $L$  un autre cycle (muni d'une orientation) de  $\mathbb{G}$  (il doit exister une autre boucle puisque  $g > 1$ ), soit  $\tilde{L}$  un relèvement du revêtement universel de  $L$  à  $\mathbb{T}$ , soit  $r_i = d_i(\tilde{L}, z_0)$  (on peut supposer, quitte à renuméroter les  $z_j$  que pour  $n \geq 0$ ,  $d_i(\tilde{L}, z_n) = r_i + n \lg_i(C)$ ) et soit  $z'_0$  le point de  $\tilde{L}$  le plus proche de  $z_0$  (cela ne dépend pas de  $i$ ).

Si  $z$  est un sommet de  $\mathbb{T}$ , notons  $F_z$  la composante connexe de  $\Omega \setminus \{\text{arêtes ouvertes de } \tilde{L}\}$  qui contient  $z$ .

Soit  $e \geq 1$  un entier.

Soit  $K_0$  un sous-graphe connexe fini de  $\mathbb{T}$  contenant  $z_1$  (ainsi  $\Phi_i^{-1}(|K_0|)$  est compact par propriété de  $\Phi_i$ ).

Soit  $K$  un sous-graphe connexe fini de  $\mathbb{T}$  tel que, pour tout  $z \in \Phi_i^{-1}(|K_0|)$ ,  $U_{z, h+2} \subset \Phi_i^{-1}(|K|)$  et tel que, pour tout sommet  $z$  de  $\tilde{L} \cap K_i$ ,  $\{z' \in F_z \mid d(z', z) \leq h+2\} \subset \Phi_i^{-1}(|K|)$  (en particulier, si  $z'$  est un sommet de la frontière de  $K$  dans  $\mathbb{T}$  qui n'est pas une extrémité du segment  $\tilde{L} \cap K$ ,  $d(z', \tilde{L}) \geq h+2$ ). Soit  $K'_i$  un sous-graphe compact de  $\mathbb{T}$  coïncidant pour  $i = 1$  et  $i = 2$  tel que  $\Phi_i^{-1}(|K'_i|)$  contient  $U_{z, h+2}$  pour tout  $z$  dans  $\Phi^{-1}(K_i)$ .

Soit  $\Gamma = \text{Gal}(\mathbb{T}/\mathbb{G})$ , soit  $H = \text{Stab}(\tilde{L})(\simeq \mathbf{Z})$  et soit  $\Gamma'$  un sous-groupe d'indice fini de  $\Gamma$  tel que, pour tout  $g \neq 1 \in \Gamma'$ ,  $\Phi_i^{-1}(|K'|) \cap g \cdot \Phi_i^{-1}(|K'|) = \emptyset$  et

pour tout  $g \in \Gamma \setminus H$ ,  $d_i(g \cdot \tilde{L}, \tilde{L}) > \text{diam}_i(|K'|)$ .

Un tel  $\Gamma'$  existe. En effet,  $A := \{g \neq 1 \in \Gamma \mid \Phi^{-1}(|K'|) \cap g \cdot \Phi^{-1}(|K'|) \neq \emptyset\}$  est fini par compacité de  $\Phi^{-1}(|K'|)$ . Comme  $\Gamma$  est résiduellement fini, il existe  $\Gamma'_1$  d'indice fini dans  $\Gamma$  qui n'intersecte pas  $A$ .  $B := \{g \in \Gamma/H - H \mid d_i(g \cdot \tilde{L}, \tilde{L}) \leq \text{diam}_i(|K'|)\}$  est aussi fini, et comme  $\overline{H} \cap \Gamma = H$  dans le complété profini de  $\Gamma$ , il existe  $\Gamma'_2$  d'indice fini dans  $\Gamma$  contenant  $H$  tel que  $\Gamma'_2 \cap B \cdot H = \emptyset$ . On peut alors choisir  $\Gamma' = \Gamma'_1 \cap \Gamma'_2$ .

Soit  $H' = H \cap \Gamma'$ . Soit  $X'_i = \Omega_i/\Gamma'$  : c'est un revêtement topologique fini de  $X_i$ , et l'isomorphisme  $\phi : \pi_1^{\text{temp}}(X_1) \simeq \pi_1^{\text{temp}}(X_2)$  induit un isomorphisme  $\phi' : \pi_1^{\text{temp}}(X'_1) \simeq \pi_1^{\text{temp}}(X'_2)$ .

Soit  $\mathcal{C}_0$  le courant sur  $\mathbb{T}$  tel que  $\mathcal{C}_0(e) = +1$  si  $e$  est une arête de  $\tilde{L}$  (et  $e$  a la bonne orientation) et 0 sinon (sauf si  $e$  est une arête de  $\tilde{L}$  avec la mauvaise orientation, auquel cas  $\mathcal{C}_0(e) = -1$ ) : ce courant est invariant par  $H$ . Soit  $\mathcal{C}_1 = \sum_{g \in \Gamma'/H'} g \cdot \mathcal{C}_0$ . C'est un courant sur  $\mathbb{T}$ , invariant par  $\Gamma'$  et qui coïncide avec  $\mathcal{C}_0$  sur  $K'$ .

Soit  $f_1 \in O(\Omega_1)^*$  "la" fonction inversible correspondante, et soit  $X''_1$  un  $(\mathbf{Z}/p^h\mathbf{Z})$ -torseur de  $X'_1$  correspondant à ce courant, c'est-à-dire tel que son pullback  $\tilde{X}''_1$  à  $\Omega_1$  soit isomorphe à  $\Omega_1 \times_{\mathbf{G}_m} \mathbf{G}_m \rightarrow \Omega_1$  où le produit fibré est pris à gauche le long de  $f_1$  et à droite le long de  $z \mapsto z^{p^h}$ . Soit  $X''_2 = \phi'^* X''_1$  ( $X''_2$  n'a a priori aucune raison de correspondre à  $\mathcal{C}_1$ ).

Soit également  $f_{0,i} \in O(\Omega_i)^*$  "la" fonction inversible correspondant au courant  $\mathcal{C}_0$  et soit  $\tilde{X}_{0,i}$  le  $(\mathbf{Z}/p^h\mathbf{Z})$ -torseur correspondant sur  $\Omega_i$ . Rappelons que ce tosseur est totalement décomposé au-dessus du point  $z \in \mathbb{T}(\Omega_i)$  si et seulement si  $d_i(z, \tilde{L}) > h + \frac{1}{p-1}$ .

D'après le corollaire 3.4.4 appliqué à  $U = \Phi^{-1}(|K'|)$  et à  $V = \Phi^{-1}(|K|)$ , le tosseur  $\tilde{X}''_1 - \tilde{X}_{0,1}$  sur  $\Omega_1$ , qui correspond au courant  $\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_0$  qui est nul au voisinage de  $K'$ , est totalement décomposé sur  $\Phi^{-1}(|K|)$  puisque pour tout  $z \in \Phi^{-1}(|K|)$ ,  $U_{z,h+2} \in \Phi^{-1}(|K'|)$ . Ainsi, pour  $z \in K$ ,  $\tilde{X}''_1$  est décomposé si et seulement si  $\tilde{X}_{0,1}$  l'est, si et seulement si  $d_1(z, \tilde{L}) > h + \frac{1}{p-1}$ .

En particulier  $\tilde{X}''_1$  est décomposé en les sommets de la frontière de  $\mathbb{K}$  qui ne sont pas des points terminaux de  $K \cap \tilde{L}$ . Ainsi, d'après le lemme 3.1.3 appliqué à  $X'_1$  et  $X''_2$  (comme  $\Omega_i \rightarrow X'_i$  est un revêtement topologique,  $\tilde{X}''_i \rightarrow \Omega_i$  est décomposé au-dessus d'un point si et seulement si  $X''_i \rightarrow X'_i$  l'est au-dessus de l'image de ce point),  $\tilde{X}''_{0,2}$  est aussi décomposé au-dessus des sommets de la frontière de  $K$  qui ne sont pas les points terminaux de  $K \cap \tilde{L}$ .

Soit  $\mathcal{C}_2$  un courant sur  $\mathbb{T}(\Omega_2)$  correspondant au  $\mathbf{Z}/p^h\mathbf{Z}$ -torseur  $\tilde{X}''_2$  (le tosseur correspondant à  $\tilde{X}''_2$  est bien défini seulement modulo  $p^h$ ). D'après 3.4.5, la restriction de  $\mathcal{C}_2$  à l'étoile d'un sommet de la frontière de  $K$  qui n'est pas un point terminal de  $K \cap \tilde{L}$  est nul modulo  $p^h$ . On en déduit que, modulo  $p^h$ , la restriction de  $\mathcal{C}_2$  à l'étoile de  $K$  doit être congrue à la restriction de  $a\mathcal{C}_0$  pour un certain  $a \in \mathbf{Z}$ . Quitte à ajouter à  $\mathcal{C}_2$  un courant qui est multiple de  $p^h$ , on peut supposer que  $\mathcal{C}_2 - a\mathcal{C}_0$  est nul sur l'étoile de  $K$  (car tout courant avec bord sur l'étoile de  $K$ , c'est-à-dire qui vérifie la loi de Kirchhoff en tout sommet de  $K$  mais sans condition sur la frontière de l'étoile de  $K$ , peut s'étendre en un courant sur

tout  $\mathbb{T}$ ).

Ainsi en appliquant le corollaire 3.4.4 à  $U = \Phi^{-1}(|K|)$  et à  $V = \Phi^{-1}(K_0)$ , on en déduit que  $\tilde{X}_2'' - a\tilde{X}_{0,2}$  est décomposé au-dessus de  $|K_0|$ , donc si  $z$  est un sommet de  $K_0$ ,  $\tilde{X}_2''$  est décomposé au-dessus de  $z$  si et seulement si  $\tilde{X}_{0,2}$  l'est ( $a$  est nécessairement non nul modulo  $p^h$  car  $\tilde{X}_2''$  ne peut pas être décomposé en  $z'_0$ ), si et seulement si  $d_2(z, \tilde{L}) > h + \frac{1}{p-1}$ , d'après le lemme 3.0.3.

Par conséquent,  $d_2(z, \tilde{L}) > h + \frac{1}{p-1}$  si et seulement si  $d_2(z, \tilde{L}) > h + \frac{1}{p-1}$  si et seulement si  $d_1(z, \tilde{L}) > h + \frac{1}{p-1}$  pour tout sommet  $z \in K_0$ .

Comme on peut choisir  $K_0$  aussi gros que voulu, on en déduit que pour tout  $z$  de  $\mathbb{T}$ ,  $d_1(z, \tilde{L}) > h + \frac{1}{p-1}$  si et seulement si  $d_2(z, \tilde{L}) > h + \frac{1}{p-1}$ , et ceci pour tout entier  $h \geq 1$ .

Donc  $\max(1, \lceil d_2(z, \tilde{L}) - \frac{1}{p-1} \rceil) = \max(1, \lceil d_1(z, \tilde{L}) - \frac{1}{p-1} \rceil)$ .

En l'appliquant à  $(z_j)_{j \geq 0}$ , on obtient que pour tout  $j \geq 0$ ,

$$\max(1, \lceil j \lg_1 + r_1 - \frac{1}{p-1} \rceil) = \max(1, \lceil j \lg_2 + r_2 - \frac{1}{p-1} \rceil).$$

On en déduit que pour tout cycle  $C$  de  $\mathbb{G}$ ,

$$\lg_1(C) = \lg_2(C).$$

Si l'on considère un revêtement topologique fini  $\mathbb{G}'$  de  $\mathbb{G}$ , l'isomorphisme  $\phi$  de groupes fondamentaux tempérés induit un isomorphisme entre les groupes fondamentaux tempérés des revêtements topologiques finis  $X'_1$  et  $X'_2$  de  $X_1$  et  $X_2$  qui correspondent au revêtement  $\mathbb{G}' \rightarrow \mathbb{G}$ .  $X'_1$  et  $X'_2$  sont aussi des courbes de Mumford, et on peut donc appliquer le résultat qu'on vient d'obtenir à  $\mathbb{G}'$ . On obtient donc que  $\lg_1(C) = \lg_2(C)$  pour tout cycle de  $\mathbb{G}'$ .

Par définition de la réduction stable, toutes les composantes de la réduction stable de  $X_i$ , qui sont toutes rationnelles car  $X_i$  est une courbe de Mumford, ont au moins trois points marqués. Donc tous les sommets de  $\mathbb{G}$  sont d'arité au moins trois. On conclut grâce à la proposition 3.4.8.  $\square$

On peut généraliser le résultat précédent au cas de courbes de Mumford épointées. Soit  $X_1, X_2$  sur  $\bar{K}$  (mais déjà définies sur  $K$ ) deux courbes de Mumford hyperboliques connexes de type  $(g, n)$ . Soit  $\phi : \pi_1^{\text{temp}}(X_1) \simeq \pi_1^{\text{temp}}(X_2)$  un isomorphisme. Il induit un isomorphisme entre les graphes de leurs réductions stables  $\mathbb{G}_1 \simeq \mathbb{G}_2$ , et même entre les semigraphes d'anabéliôides  $\mathcal{G}_1^c \simeq \mathcal{G}_2^c$ .

**Corollaire 3.4.7.** *L'isomorphisme de graphes  $\mathbb{G}_1 \simeq \mathbb{G}_2$  induit par  $\phi$  est un isomorphisme de graphes métriques.*

*Démonstration.* On a déjà traité le cas  $g = 0$ . Supposons donc  $g > 0$ .

Soit  $\bar{X}_i$  la compactification de  $X_i$ .  $\phi$  induit un isomorphisme  $\bar{\phi} : \pi_1^{\text{temp}}(\bar{X}_1) \simeq \pi_1^{\text{temp}}(\bar{X}_2)$  d'après 3.1.2. Soit  $\mathbb{G}'_i$  le graphe de la réduction stable de la compactification de  $\bar{X}_i$ . On a un plongement isométrique  $|\mathbb{G}'_i| \rightarrow |\mathbb{G}_i|$  compatible avec les isomorphismes induits par  $\phi$  et  $\bar{\phi}$ , c'est une équivalence d'homotopie.

Soit  $e$  une arête de  $\mathbb{G}$ . Distinguons trois cas :

- $e$  est déjà une arête de  $\mathbb{G}'$ . On sait déjà grâce au cas propre que  $d_1(e) = d_2(e)$ .

- $e$  est un morceau d'une arête  $e'$  de  $\mathbb{G}'$  qui a été divisée.  $e$  a donc deux sommets distincts (le cas  $g = 1, n = 1$  ayant déjà été traité).  $e$  a nécessairement un sommet  $v$  qui n'est pas un sommet de  $\mathbb{G}'$ , et donc il existe un point cuspidal  $x$  du semigraph  $\mathbb{G}^c$  tel que  $v$  soit le point de  $|\mathbb{G}'|$  le plus près de  $x$ . Soit  $\mathbb{H}'$  un revêtement (topologique) connexe d'ordre 2 de  $\mathbb{G}'$ ,  $\mathbb{H}^c$  le revêtement correspondant de  $\mathbb{G}^c$  et  $Y_i$  le revêtement topologique correspondant de  $X_i$ . Soit  $x_1$  et  $x_2$  (resp.  $v_1$  et  $v_2$ ,  $e_1$  et  $e_2$ ) les préimages de  $x$  (resp.  $v$ ,  $e$ ) et  $L$  un chemin injectif reliant  $x_1$  à  $x_2$ . Soit  $\mathcal{C}$  le courant sur  $\mathbb{H}^c$  qui vaut 1 le long de  $L$  et 0 ailleurs. Soit  $l$  premier à  $p$ , et soit  $Z_i$  le  $\mathbf{Z}/l\mathbf{Z}$ -torseur sur  $Y_i$  correspondant à  $\mathcal{C}$ . Comme en tout sommet le courant est non nul en au plus deux branches,  $Z_i$  est encore une courbe de Mumford. Soit  $\mathbb{I}$  le semigraph de la réduction stable de  $Z_i$  : une arête  $a$  de  $\mathbb{I}$  a 1 préimage de longueur  $d_i(a)/l$  si  $a$  est sur  $L$  et  $l$  préimages de longueurs  $d_i(a)$  sinon. La réalisation géométrique du graphe  $\mathbb{I}'$  de la réduction stable de la compactification  $\bar{Z}_i$  de  $Z_i$  contient la préimage  $I''$  de  $|\mathbb{H}'|$  dans  $|\mathbb{I}|$  ( $\mathbb{I}'$  ne dépend pas de  $i$  grâce à 3.1.2). Mais l'unique préimage  $v'_1$  (resp.  $v'_2$ ) de  $v_1$  (resp.  $v_2$ ) dans  $I''$  est d'arité  $l + 1$  donc d'arité au moins  $l + 1 > 2$  dans  $|\mathbb{I}|$ , donc  $v$  est un sommet de  $\mathbb{I}'$ .  
Si l'autre sommet de  $e$  était un sommet de  $\mathbb{G}'$ , toute préimage  $e''$  de  $e$  dans  $\mathbb{I}$  serait une arête de  $\mathbb{I}'$ , donc  $d_1(e'') = d_2(e'')$ . Mais comme  $d_i(e) = jd_i(e'')$  où  $j = 1$  ou  $l$  mais ne dépend pas de  $i$ , on déduit du premier cas appliqué à  $Z_1$  et  $Z_2$  que  $d_1(e) = d_2(e)$ .  
Si aucun des deux sommets de  $e$  n'était un sommet de  $\mathbb{G}'$ , une préimage  $e''$  de  $e$  dans  $\mathbb{I}$  aurait maintenant au moins un de ces sommets qui est dans  $\mathbb{I}'$ , donc  $d_1(e'') = d_2(e'')$  d'après le cas qui précède appliqué à  $Z_1$  et  $Z_2$ . On conclut alors comme dans le cas précédent.
- $e$  n'est pas dans  $|\mathbb{G}'|$ . Soit  $v$  le sommet de  $e$  le plus éloigné de  $|\mathbb{G}|$ . Soit  $e_1$  et  $e_2$  deux autres arêtes distinctes ayant  $v$  pour sommet. Soit  $v_1$  (resp.  $v_2$ ) un point cuspidal du semigraph  $\mathbb{G}^c$  plus proche de  $e_1$  (resp.  $e_2$ ) que de  $v$ . Soit alors  $L$  l'unique chemin injectif reliant  $v_1$  à  $v_2$ .  $L$  passe par  $v$  mais ne passe pas par l'intérieur de  $e$ . Soit  $\mathcal{C}$  le courant sur  $\mathbb{G}^c$  qui suit  $L$ . Soit  $l > 1$  premier à  $p$  et soit  $Y_i$  le  $\mathbf{Z}/l\mathbf{Z}$ -torseur sur  $X_i$  défini par  $\mathcal{C}$ . C'est encore une courbe de Mumford puisqu'en tout sommet le courant est non nul sur au plus deux branches. Soit  $\mathbb{H}^c$  le semigraph correspondant et  $\mathbb{H}$  le graphe de la réduction stable de la compactification  $\bar{Y}_i$  de  $Y_i$  ( $\mathbb{H}$  ne dépend pas de  $i$ ).  $e$  a  $l$  préimages, toutes de longueur  $d_i(e)$ . De plus une telle préimage est dans  $|\mathbb{H}|$ . Donc  $d_1(e) = d_2(e)$  d'après le cas précédent appliqué à  $Y_1$  et  $Y_2$ .

□

### 3.4.4 Un résultat combinatoire

**Proposition 3.4.8.** *Soit  $\mathbb{G}$  un graphe fini dont tous les sommets sont d'arité au moins 3. Soit  $f : \{\text{arêtes de } \mathbb{G}\} \rightarrow \mathbf{R}$ . On notera encore  $f$  la fonction induite sur l'ensemble des arêtes d'un revêtement de  $\mathbb{G}$ . Posons, pour  $C$  un cycle d'un revêtement de  $\mathbb{G}$ ,  $f(C) = \sum_{x \in \{\text{arêtes de } C\}} f(x)$ .*

*Si  $f(C)$  est nul pour tout cycle  $C$  de tout revêtement fini de  $\mathbb{G}$ , alors  $f$  est nulle.*

*Démonstration.* Commençons par remarquer que si  $\mathbb{G}$  est un graphe fini dont toutes les arêtes sont d'arité au moins 3, et si  $\mathbb{H}$  est un sous-graphe connexe tel

que le nombre de demi-arêtes de  $\mathbb{G} \setminus \mathbb{H}$  dont l'extrémité est dans  $\mathbb{H}$  est strictement inférieur à 3, alors  $\mathbb{H}$  n'est pas un arbre (si  $\mathbb{H}$  est un arbre avec au moins une arête,  $\mathbb{H}$  a au moins deux sommets d'arité 1, et donc déjà 4 demi-arêtes de  $\mathbb{G} \setminus \mathbb{H}$  doivent terminer en l'un de ces deux sommets ; si  $\mathbb{H}$  est réduit à un point, c'est également évident).

Revenons à l'énoncé. Nous allons procéder par récurrence sur le nombre d'arêtes de  $\mathbb{G}$ .

Soit donc  $(\mathbb{G}, f)$  un graphe à  $n \geq 1$  arêtes muni d'une fonction  $f$  sur l'ensemble des arêtes de  $\mathbb{G}$  vérifiant les hypothèses de l'énoncé, et supposons l'énoncé vrai dès que  $\mathbb{G}$  a strictement moins de  $n$  arêtes.

On peut supposer  $\mathbb{G}$  connexe (sinon on applique l'hypothèse de récurrence à chaque composante connexe).

Soit  $e$  une arête de  $\mathbb{G}$ , et commençons par supposer que :

1. les deux sommets de  $e$  sont distincts. Soient  $(m, n)$  les arités des sommets de  $e$  dans  $\mathbb{G} \setminus \{e\}$ . On a, par hypothèse sur  $\mathbb{G}$ ,  $m \geq 2$  et  $n \geq 2$ .

- (a) Si  $m \geq 3$  et  $n \geq 3$ ,  $\mathbb{G}' = \mathbb{G} \setminus \{e\}$  est encore un graphe dont tous les sommets sont d'arité au moins 3. De plus, tout revêtement de  $\mathbb{G}'$  peut se prolonger en un revêtement de  $\mathbb{G}$  donc si  $C$  est un cycle d'un revêtement fini de  $\mathbb{G}'$ ,  $C$  est aussi un cycle d'un revêtement fini de  $\mathbb{G}$  et donc  $f(C) = 0$ . On peut ainsi appliquer l'hypothèse de récurrence à  $\mathbb{G}'$  et à  $f : f(x) = 0$ , pour toute les arêtes de  $\mathbb{G}$  autre que  $e$ .

- i. Si  $\mathbb{G}'$  est connexe, on peut trouver un cycle  $C$  de  $\mathbb{G}$  passant par  $e$ , et alors  $f(e) = f(C) = 0$ . D'où le résultat.

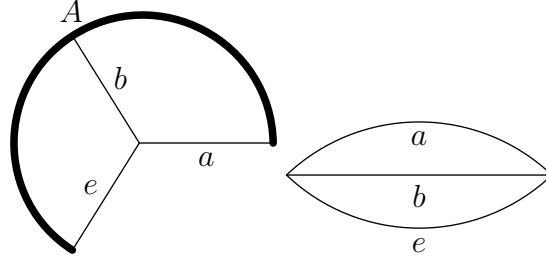
- ii. Si  $\mathbb{G}'$  a deux composantes connexes  $A$  et  $B$ , qui ne peuvent pas être des arbres d'après la remarque faite en début de démonstration, on considère  $A'$  et  $B'$  des revêtements connexes d'ordre 2 de  $A$  et  $B$  respectivement, qu'on recolle en un revêtement  $\mathbb{G}'$  de  $\mathbb{G}$  d'ordre 2.

Il existe alors un cycle  $C$  de  $\mathbb{G}'$  passant par les 2 préimages de  $e$ . Alors  $2f(e) = f(C) = 0$ . D'où le résultat.

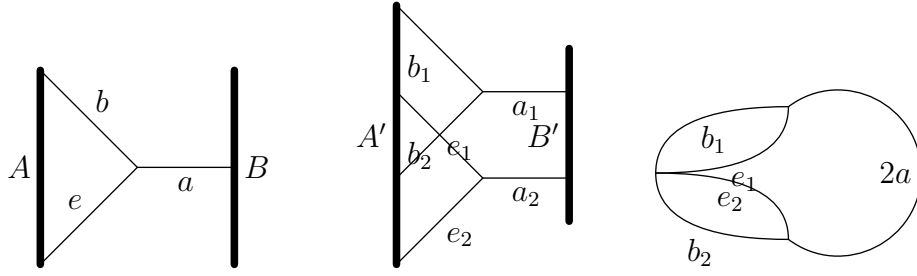
- (b) si  $m \geq 3$  et  $n = 2$  (ou l'inverse), et soit  $a$  et  $b$  les deux arêtes partant du second sommet de  $e$  (si  $a$  et  $b$  ne sont en fait que les deux demi-arêtes d'une seule arête, le graphe a alors la même structure que pour le cas 2.(c).i, où il sera traité ; nous supposons donc ici que  $a$  et  $b$  sont deux arêtes distinctes). Soit  $\mathbb{G}'$  le graphe obtenu à partir de  $\mathbb{G}$  en enlevant  $e$  et en concaténant  $a$  et  $b$  en une seule arête notée  $a + b$  (et posons  $f(a + b) = f(a) + f(b)$ ). Alors  $(\mathbb{G}', f)$  vérifie les hypothèses de l'énoncé, donc  $f(x) = 0$  pour toute arête de  $\mathbb{G}$  autre que  $a, b$  et  $e$ . En fonction du nombre de composantes connexes de  $\mathbb{G}'' = \mathbb{G} \setminus \{a, b, e\}$ , distinguons plusieurs cas :

- i. Dans le cas où  $\mathbb{G}''$  n'a qu'une composante connexe, on peut contracter  $\mathbb{G}''$  en un point pour obtenir un graphe  $\mathbb{G}_1$  à trois arêtes (en effet toute cycle  $C_1$  de  $\mathbb{G}_1$  admet un relèvement  $C$  à  $\mathbb{G}$  par connexité de  $\mathbb{G}''$ , et  $f(C_1) = f(C)$  puisque  $f$  est nulle sur  $\mathbb{G}''$ ), et l'on en déduit que  $f(a) + f(b) = 0$ ,  $f(a) + f(e) = 0$  et  $f(b) + f(e) = 0$ . D'où le résultat.

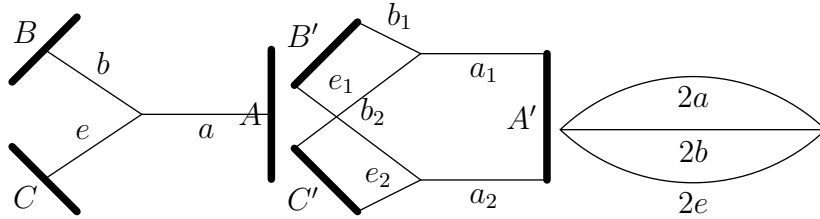




- ii. Dans le cas où  $\mathbb{G}''$  a deux composantes  $A$  et  $B$  comme sur le dessin (maintenant  $a$ ,  $b$  et  $e$  joueront le même rôle et le raisonnement sera le même si on les échange), on commence par considérer un revêtement connexe  $\mathbb{G}_1$  d'ordre 2 de  $\mathbb{G}$  dont les restrictions  $A'$  et  $B'$  à  $A$  et à  $B$  sont connexes (il en existe car  $A$  et  $B$  ne sont pas des arbres d'après la remarque du début de la démonstration), puis on contracte  $A'$  et  $B'$  en un graphe  $\mathbb{G}_2$ . On obtient  $f(b) + f(e) = 0$ ,  $2f(a) + 2f(b) = 0$ ,  $2f(a) + 2f(e) = 0$ , d'où le résultat.



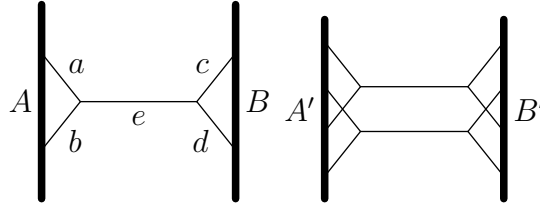
- iii. Dans le cas où  $\mathbb{G}''$  a trois composantes connexes  $A$ ,  $B$  et  $C$ , on commence par considérer un revêtement connexe  $\mathbb{G}_1$  d'ordre 2 de  $\mathbb{G}$  dont les restrictions  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$  à  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont connexes, puis on contracte  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$ . On en déduit  $2f(a) + 2f(b) = 0$ ,  $2f(b) + 2f(e) = 0$ ,  $2f(e) + 2f(a) = 0$ . D'où le résultat.



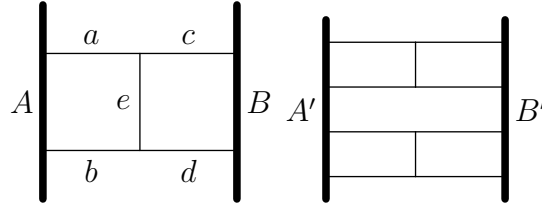
- (c) Si  $m = n = 2$ , soient  $a, b$  les (demi-)arêtes partant d'un sommet et  $c, d$  les (demi-)arêtes partant de l'autre sommet de  $e$ . Soit  $\mathbb{G}'$  le graphe obtenu à partir de  $\mathbb{G}$  en retirant  $e$  puis en concaténant  $a$  et  $b$  en  $a+b$  d'un côté, et  $c$  et  $d$  en  $c+d$  de l'autre. Si l'on pose  $f(a+b) = f(a) + f(b)$  et  $f(c+d) = f(c) + f(d)$ ,  $(\mathbb{G}', f)$  vérifie les condition de l'énoncé, et

donc, par hypothèse de récurrence,  $f(x) = 0$  pour toute arête  $x$  de  $\mathbb{G}$  différente de  $a, b, c, d$  et  $e$ . Soit  $\mathbb{G}'' = \mathbb{G} \setminus \{a, b, c, d, e\}$ . En fonction des composantes connexes de  $\mathbb{G}''$ , distinguons plusieurs cas :

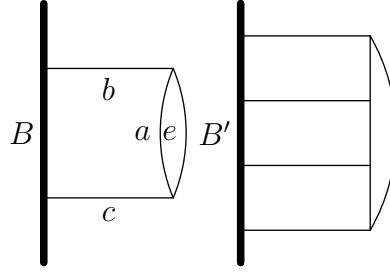
- i. Supposons que  $\mathbb{G}$  ait deux composantes connexes,  $A$  contenant une extrémité de  $a$  et de  $b$ , et  $B$  contenant une extrémité de  $c$  et de  $d$  (si  $(a, b)$  ou  $(c, d)$  sont les demi-arêtes d'une même arête, le graphe à la même structure que dans le cas 2.(c).ii.B ; si  $(a, b)$  et  $(c, d)$  ne forment que deux arêtes, la structure est celle du cas dégénéré de 2.(c).(ii)). On Commence par considérer un revêtement connexe  $\mathbb{G}_1$  d'ordre 2 de  $\mathbb{G}$  dont les restrictions  $A'$  et  $B'$  à  $A$  et  $B$  sont connexes, puis on contracte  $A'$  et  $B'$ . On obtient par exemple que  $f(c) + f(d), f(a) + f(b), 2(f(a) + f(e) + f(d)), 2(f(a) + f(e) + f(c))$  et  $2(f(b) + f(e) + f(d))$  sont nuls. D'où le résultat.



- ii. Supposons que  $\mathbb{G}$  ait deux composantes connexes,  $A$  contenant une extrémité de  $a$  et  $c$ , et  $B$  contenant une extrémité de  $b$  et  $d$ . On commence, comme d'habitude par considérer un revêtement connexe  $\mathbb{G}_1$  d'ordre 2 de  $\mathbb{G}$  dont les restrictions  $A'$  et  $B'$  à  $A$  et  $B$  sont connexes puis on contracte  $A'$  et  $B'$ . On en déduit par exemple que  $f(a) + f(b) + f(c) + f(d) = 2(f(a) + f(e) + f(d)) = 2(f(b) + f(e) + f(c)) = 2(f(a) + f(c)) = f(b) + f(c) + f(e) = 0$ . D'où le résultat.

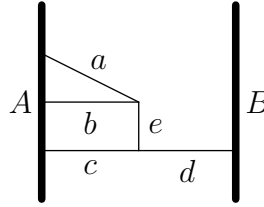


Si  $(a, c)$  (ou symétriquement  $(b, d)$ ) ne sont que les deux demi-arêtes d'une seule arête que l'on notera  $a$ , on considère un revêtement  $\mathbb{G}_1$  d'ordre 2 de  $\mathbb{G}$  dont les restrictions  $B'$  à  $B$  et  $(a \cup e)'$  à  $a \cup e$  sont connexes. On en déduit  $f(a) + f(b) + f(c) = f(e) + f(b) + f(c) = 2(f(a) + f(e)) = f(a) + f(e) + 2f(b) = 0$ . D'où le résultat.

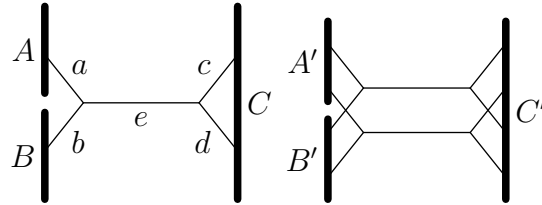


Si  $(a, c)$  et  $(b, c)$  sont dégénérés en deux arêtes, alors  $\mathbb{G}$  n'a que deux sommets et trois arêtes reliant ces deux sommets, et le résultat est évident.

- iii. Supposons que  $\mathbb{G}$  ait deux composantes connexes,  $A$  contenant une extrémité de  $a, b$  et  $c$ , et  $B$  contenant une extrémité de  $d$ . On sait déjà par hypothèse de récurrence appliqué à  $\mathbb{G}'$  que  $f(c) + f(d) = 0$ . Maintenant, en contractant  $A$ , on en déduit que  $f(a) + f(b) = f(b) + f(c) + f(e) = f(a) + f(c) + f(e) = 0$ . D'où le résultat.

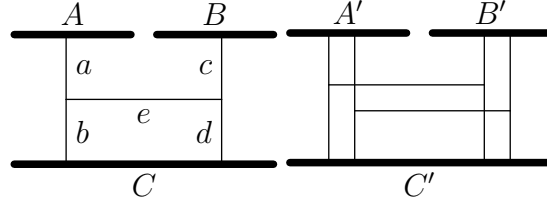


- iv. Supposons que  $\mathbb{G}$  ait trois composantes connexes,  $A$  contenant une extrémité de  $a$ ,  $B$  contenant une extrémité de  $b$ , et  $C$  contenant une extrémité de  $c$  et  $d$ . On commence, comme d'habitude par considérer un revêtement connexe  $\mathbb{G}_1$  d'ordre 2 de  $\mathbb{G}$  dont les restrictions  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$  à  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont connexes, puis on contracte  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$ . On en déduit par exemple que  $f(c) + f(d) = 2(f(a) + f(b)) = 2(f(a) + f(e) + f(c)) = 2(f(b) + f(e) + f(c)) = 2f(a) + 2f(e) + f(c) + f(d) = 0$ . D'où le résultat.

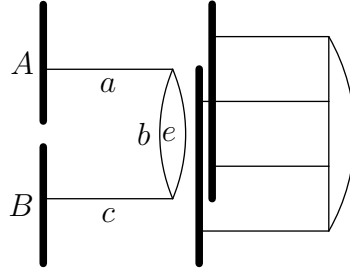


Si  $(c, d)$  est dégénéré en une seule arête  $c$ , le graphe a la même structure qu'en 2.(c).ii.A.

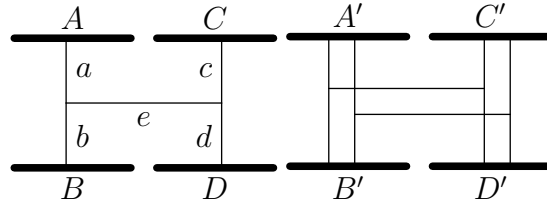
- v. Supposons que  $\mathbb{G}$  ait trois composantes connexes,  $A$  contenant une extrémité de  $a$ ,  $B$  contenant une extrémité de  $c$ , et  $C$  contenant une extrémité de  $b$  et  $d$ . On commence, comme d'habitude par considérer un revêtement connexe  $\mathbb{G}_1$  d'ordre 2 de  $\mathbb{G}$  dont les restrictions  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$  à  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont connexes, puis on contracte  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$ . On en déduit par exemple que  $f(b) + f(d) + f(e) = f(b) + f(d) + f(e) + 2f(a) = 2(f(a) + f(b)) = 2(f(d) + f(c)) = 2(f(c) + f(e) + f(a)) = 0$ .



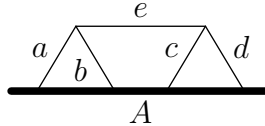
Si  $(b, d)$  est dégénéré en une seule arête  $b$ , considérons un revêtement  $\mathbb{G}_1$  d'ordre 2 de  $\mathbb{G}$  dont les restrictions à  $A$ ,  $B$  et  $b \cap e$  sont connexes, puis on contracte  $A'$  et  $B'$ . On en déduit que  $2f(a) + f(e) + f(b) = 2(f(b) + f(e)) = 2f(c) + f(b) + f(e) = 2(f(a) + f(b) + f(c)) = 0$ .



- vi. Supposons que  $\mathbb{G}$  ait quatre composantes connexes,  $A$  contenant une extrémité de  $a$ ,  $B$  contenant une extrémité de  $c$ ,  $C$  contenant une extrémité de  $b$  et  $D$  contenant une extrémité de  $d$ . On commence, comme d'habitude par considérer un revêtement connexe  $\mathbb{G}_1$  d'ordre 2 de  $\mathbb{G}$  dont les restrictions  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  et  $D'$  à  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont connexes, puis on contracte  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  et  $D'$ . On en déduit par exemple que  $2(f(b) + f(d) + f(e)) = f(b) + f(d) + f(e) + 2f(a) = f(b) + f(d) + f(e) + 2f(c) = 2(f(b) + f(a)) = 2(f(c) + f(d)) = 0$ .



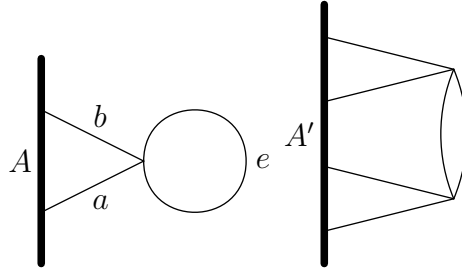
- vii. Supposons que  $\mathbb{G}$  ait une seule composante connexe  $A$ , et contractons-la. On en déduit que  $f(a) + f(b) = f(c) + f(d) = f(a) + f(c) + f(e) = f(b) + f(c) + f(e) = f(a) + f(d) + f(e) = 0$ . D'où le résultat.



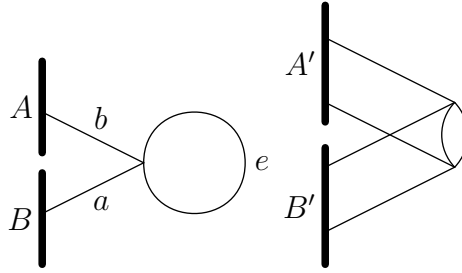
2. Supposons que les deux extrémités de  $e$  soit un même sommet, et soit  $m$  l'arité de ce sommet dans  $\mathbb{G} \setminus \{e\}$ . On a  $m \geq 1$ .
- (a) Supposons  $m \geq 3$ . Alors  $\mathbb{G} \setminus \{e\}$  vérifie les conditions de l'énoncé et donc  $f(x) = 0$  pour toute arête de  $\mathbb{G}$  autre que  $e$ , et comme  $e$  est une boucle,  $f(e) = 0$  aussi.

- (b) Supposons  $m = 2$ , et soit  $a$  et  $b$  les deux arêtes partant du sommet de  $e$  (si  $a$  et  $b$  sont en fait les deux demi-arêtes d'une même arête,  $\mathbb{G}$  est réduit à deux arêtes formant chacune une boucle, et le résultat est évident). Soit  $\mathbb{G}'$  le graphe obtenu à partir de  $\mathbb{G}$  en supprimant  $e$  et en concaténant  $a$  et  $b$  en une arête  $a+b$  et posons  $f(a+b) = f(a) + f(b)$ . Alors  $\mathbb{G}'$  vérifie les hypothèses de l'énoncé et donc, par hypothèse de récurrence,  $f$  est nulle en toute arête autre que  $e$ ,  $a$  et  $b$ . Distinguons selon les composantes connexes de  $\mathbb{G}'' = \mathbb{G} \setminus \{a, b, e\}$ .

- i. Supposons que  $\mathbb{G}''$  ait une unique composante connexe  $A$ . On considère un revêtement  $\mathbb{G}_1$  d'ordre 2 de  $\mathbb{G}$  dont la restriction  $A'$  à  $A$  est connexe et dont la restriction à  $e$  est également connexe, puis on contracte  $A'$  pour obtenir un graphe  $\mathbb{G}_2$ . On en déduit  $2f(a) + f(e) = 2f(b) + f(e) = 2f(e) = 0$ . D'où le résultat.

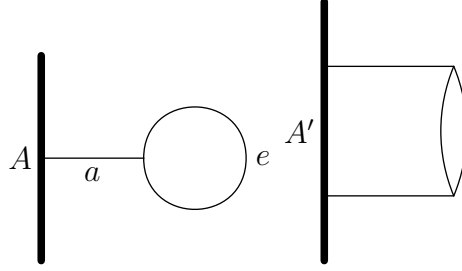


- ii. Supposons que  $\mathbb{G}''$  ait deux composantes connexes,  $A$  ayant l'extrémité de  $a$ , et  $B$  ayant l'extrémité de  $b$ . On considère un revêtement  $\mathbb{G}_1$  d'ordre 2 de  $\mathbb{G}$  dont les restrictions  $A'$  et  $B'$  à  $A$  et  $B$  sont connexes et dont la restriction à  $e$  est également connexe, puis on contracte  $A'$  et  $B'$  pour obtenir un graphe  $\mathbb{G}_2$ . On en déduit  $2f(a) + f(e) = 2f(b) + f(e) = 2f(e) = 0$ . D'où le résultat.



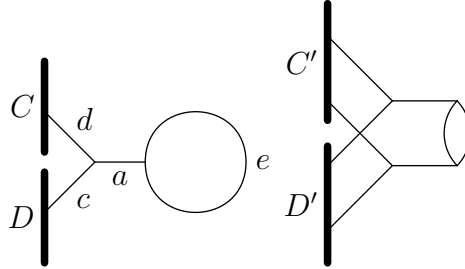
- (c) Supposons  $m = 1$ , et soit  $a$  l'arête partant l'extrémité de  $e$ . Soit  $n$  l'arité de l'autre extrémité de  $a$  dans  $\mathbb{G}' = \mathbb{G} \setminus \{a, e\}$ . On a nécessairement  $n \geq 2$ .

- i. Supposons  $n \geq 3$ . Alors  $\mathbb{G}'$  vérifie encore les conditions de l'énoncé, donc, par hypothèse de récurrence,  $f$  est nulle sur  $\mathbb{G}'$ . On considère maintenant un revêtement  $\mathbb{G}_1$  d'ordre 2 de  $\mathbb{G}$  dont les restrictions à  $\mathbb{G}'$  et à  $e$  sont connexes, puis on contracte l'image réciproque de  $\mathbb{G}'$ . On obtient  $2f(e) = 2f(a) + f(e) = 0$ . D'où le résultat.

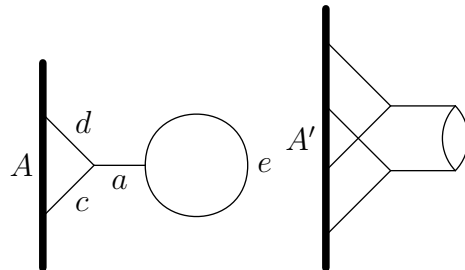


ii. Supposons  $n \geq 2$ , et soit  $c$  et  $d$  les deux arêtes en question (si ce sont les deux demi-arêtes d'une unique arête,  $\mathbb{G}$  est réduit à deux boucles reliées entre elles par une arête ; graphe pour lequel on montre le résultat en considérant un graphe d'ordre 2 dont la restriction à chacune des boucles est connexe). Soit  $\mathbb{G}''$  le graphe obtenu à partir de  $\mathbb{G}'$  en concaténant  $c$  et  $d$  en  $c+d$  et en posant  $f(c+d) = f(c) + f(d)$ .  $\mathbb{G}''$  vérifie les conditions de l'énoncé, et donc  $f$  est nulle en toute arête autre que  $a, e, c$  et  $d$  (et en fait  $f(e) = 0$  aussi). Soit  $\mathbb{G}''' = \mathbb{G} \setminus \{a, c, d, e\}$ , et distinguons suivant le nombre de composantes connexes de  $\mathbb{G}'''$ .

A. Si  $\mathbb{G}'''$  a deux composantes connexes  $C$  contenant l'extrémité de  $c$  et  $D$  contenant l'extrémité de  $d$ , on considère un revêtement  $\mathbb{G}_1$  de  $\mathbb{G}$  dont les restrictions  $C', D'$  et  $e'$  à  $C, D$  et  $e$  sont connexes, puis on contracte  $C', D'$  et  $e'$ , on obtient  $2f(a) + 2f(c) = 2f(a) + 2f(d) = 2f(c) + 2f(d) = 0$ . D'où le résultat.



B. Si  $\mathbb{G}'''$  a une composante connexe  $A$ , on considère un revêtement  $\mathbb{G}_1$  de  $\mathbb{G}$  dont les restrictions  $A'$  et  $e'$  à  $A$  et  $e$  sont connexes, puis on contracte  $A'$  et  $e'$ , on obtient  $2f(a) + 2f(c) = 2f(a) + 2f(d) = 2f(c) + 2f(d) = 0$ . D'où le résultat.



□

## Chapitre 4

# Complexes classifiants de groupes

Nous introduisons ici des objets combinatoires, que nous appellerons complexes classifiants, généralisant la notion de complexes de groupe de Haefliger ([20]). L'espace combinatoire de base n'est pas nécessairement un ensemble simplicial. En fait, nous nous en servons plutôt avec des ensembles polysimpliciaux qu'avec des ensembles simpliciaux. Les groupes servant de constituants aux complexes ne seront pas non plus supposés discrets. En fait nous utiliserons des complexes dont les composantes sont des groupes profinis.

A un tel complexe classifiant nous associerons une catégorie de revêtements et un groupe fondamental, qui classe ces revêtements. Ce groupe fondamental sera encore un groupe topologique.

Nous définirons également une notion de revêtement tempérés dans ce contexte, et donc un groupe fondamental tempéré associé.

### 4.1 Groupes quasiprodiscrets

Soit  $G$  un groupe topologique. Soit  $G\text{-Ens}$  la catégorie des  $G$ -ensembles discrets, muni du foncteur canonique  $F : G\text{-Ens} \rightarrow \text{Ens}$ .

$G\text{-Ens}$  est un topos ([23, ex. A.2.1.6]). Il est clair qu'il est connexe (son objet final n'a pas de sous-objet non trivial), localement connexe et atomique.  $G\text{-Ens} \rightarrow \text{Ens}$  est le pullback d'un point du topos  $G\text{-Ens}$  (et ce point est conservatif; [23, ex. A.4.1.7]).

Notons  $\hat{G} = \text{Aut } F$ , on a un morphisme évident  $G \rightarrow \hat{G}$ .  $\hat{G}$  est un groupe topologique pour lequel les  $(\text{Stab}_{F(S),s}^{\hat{G}})_{S \in \text{Ob}(G\text{-Ens}), s \in F(S)}$  forment une base de voisinages de 1.

**Proposition 4.1.1.** *On a alors une immersion topologique  $\hat{G} \rightarrow \varprojlim \hat{G} / \text{Stab}_{F(S),s}^{\hat{G}} = \varprojlim_H G/H$  où  $H$  parcourt les sous-groupes ouverts de  $G$ . Plus précisément, on a  $\hat{G} = \text{Aut } F \subset \text{End } F = \varprojlim_H G/H$ .*

*Démonstration.* En effet, soit  $\gamma \in \text{End } F$ . Etant donné un sous-groupe ouvert  $H$  de  $G$ , on considère le  $G$ -ensemble  $S = G/H$ . Notons  $\gamma_H$  l'image du point  $H$

de  $F(S) = G/H$  par  $\gamma$ , c'est un élément de  $G/H$ . La fonctorialité de  $\gamma$  assure que l'on obtient un système compatible d'objets de  $G/H$ . D'où une fonction  $\text{End } F \rightarrow \varprojlim_H G/H$ .

Réciproquement étant donné  $(\gamma_H)_H \in \varprojlim_H G/H$ , définissons un endomorphisme  $\gamma$  de  $F$ . Soit  $S$  un  $G$ -ensemble et soit  $s \in F(S)$ . Soit  $H = \text{Stab}_{F(S),s}^G$ . Alors  $\gamma(s) = g \cdot s$  où  $g \in \gamma_H$ . Si  $\phi : S' \rightarrow S$  est un morphisme de  $G$ -ensembles qui envoie  $s'$  sur  $s$ , on a  $H' \subset H$  où  $H' = \text{Stab}_{s'}^G$  et  $H = \text{Stab}_s^G$ . Soit  $g \in \gamma_{H'}$  (et donc  $g \in \gamma_H$  par compatibilité de  $(\gamma_H)$ ). Alors  $\gamma(s') = g \cdot s' = g \cdot \phi(s) = \phi(g \cdot s) = \phi(\gamma(s))$ . Donc  $\gamma$  définit bien un endomorphisme de  $F$ .  $\square$

On déduit en particulier de cette proposition que  $G$  est d'image dense dans  $\hat{G}$ .

On peut décrire plus directement la structure de monoïde sur  $\varprojlim_H G/H$  induite par celle de  $\text{End } F$ . Si  $(\bar{\alpha}_H)_H, (\bar{\beta}_H)_H \in \varprojlim_H G/H$ , leur produit est donné par  $\gamma_H = \alpha_{\beta_H H \beta_H^{-1}} \beta_H$ . En effet l'image  $\beta \in \text{End}(F)$  de  $(\bar{\beta}_H)_H$  envoie  $s = H \in G/H$  sur  $s' = \beta_H H$ . Le stabilisateur de  $s'$  est  $\beta_H H \beta_H^{-1}$ , donc l'endomorphisme  $\alpha$  envoie  $s'$  sur  $s'' = \alpha_{\beta_H H \beta_H^{-1}} \beta_H H$ .

Si l'on note  $\tilde{G}$  le groupe  $G$  mais muni de la topologie où les sous-groupes ouverts de  $G$  forment une base d'ouverts. Alors  $\varprojlim G/H$  n'est autre que le complété de  $\tilde{G}$  pour la structure uniforme gauche de [9, § III.3.1]. La multiplication est alors celle donnée par [9, prop. III.3.6].

*Remarque.* L'immersion  $\text{Aut } F \subset \text{End } F$  n'est en général pas surjective. Par exemple, soit  $I$  un ensemble et soit  $G$  le groupe des permutations de  $I$  qui fixent tous les éléments sauf un nombre fini, muni de la topologie pour laquelle les fixateurs des parties finies de  $I$  forment une base de voisinage ouverts de 1, alors  $\text{End } F$  est l'ensemble de toutes les applications de  $I$  dans  $I$ . Ainsi,  $\text{End } F$  contient des éléments non inversibles dès que  $I$  est infini.

**Définition 4.1.1.** On appellera groupe *quasiprodiscret* (ou groupe qpd) un groupe topologique tel que  $G \rightarrow \hat{G}$  soit un isomorphisme de groupes topologiques.

En général, l'homomorphisme  $f : G \rightarrow \hat{G}$  induit un foncteur canonique  $f^* : \hat{G}\text{-Ens} \rightarrow G\text{-Ens}$ , et comme  $\hat{G} = \text{Aut } F$ ,  $F(S)$  est naturellement muni d'une structure de  $\hat{G}$ -ensemble, ce qui donne un foncteur  $g : G\text{-Ens} \rightarrow \hat{G}\text{-Ens}$  : ce sont en fait des foncteurs quasi-inverses (en particulier  $f^*$  et  $g$  sont des équivalences de catégories). En effet,  $f^*g$  est clairement isomorphe à l'identité, et  $f^*$  est pleinement fidèle car  $G$  est d'image dense dans  $\hat{G}$ .

Donc  $\hat{\hat{G}} = \hat{G}$  ( $\hat{G}$  est qpd). On appellera  $\hat{G}$  le complété qpd de  $G$ .

*Remarque :* Un objet connexe  $G/H$  de  $G\text{-Ens}$  est localement constant en tant qu'objet de  $G\text{-Ens}$  si et seulement si  $H$  contient un sous-groupe ouvert distingué dans  $G$ .  $G\text{-Ens}$  est donc un topos galoisien si et seulement si  $\hat{G}$  est prodiscret.

Soit  $G$  un groupe qpd, et soit  $H$  un sous-groupe de  $G$ . On notera  $\overline{H}$  l'adhérence de  $H$  et  $\overline{\overline{H}}$  l'intersection des sous-groupes ouverts contenant  $H$ .

On a  $\overline{\overline{H}} = \overline{H}$  dans les deux cas suivants :



- $G$  est un groupe prodiscret. En effet, comme la famille  $(gO)$ ,  $O$  décrivant les sous-groupes ouverts distingués de  $G$  et  $g$  décrivant les éléments de  $G$ , forme une base d'ouverts de  $G$ ,

$$\begin{aligned} G \setminus \overline{H} = G \setminus^\circ H &= \bigcup_{(O,g) \mid H \cap gO = \emptyset} gO \\ &= \bigcup_O \bigcup_{g \notin HO} gO. \end{aligned}$$

où  $HO$  est un sous-groupe ouvert de  $G$  car  $O$  est distingué. Donc

$$\overline{H} = \bigcap_O \bigcap_{g \in HO} gO = \bigcap_O HO.$$

- $H$  est distingué. En effet, on a  $\overline{H} = \bigcap_O HO$  où  $O$  décrit les sous-groupes ouverts de  $G$ . Comme  $H$  est maintenant supposé distingué,  $HO$  est encore un sous-groupe ouvert de  $G$ .

Soient  $G_1, G_2$  deux groupes qpd et  $f : G_1 \rightarrow G_2$  un morphisme,  $f^* : G_2\text{-Ens} \rightarrow G_1\text{-Ens}$  le foncteur induit.

**Proposition 4.1.2.** –  $f^*$  est fidèle ;

- si  $f^*$  est pleinement fidèle,  $\overline{\text{Im } f} = G_2$  ;
- si  $\overline{\text{Im } f} = G_2$ ,  $f^*$  est pleinement fidèle ;
- $f^*$  est une équivalence de catégorie si et seulement si  $f$  est un isomorphisme.

*Démonstration.* Soit  $\psi$  le foncteur oubli  $G_1\text{-Ens} \rightarrow \text{Ens}$ .

Le foncteur  $\psi f^* : G_2\text{-Ens} \rightarrow \text{Ens}$  est fidèle, donc  $f^*$  aussi.

Supposons  $\overline{\text{Im } f} \neq G_2$ . Soit  $H$  un sous-groupe ouvert strict de  $G_2$  contenant  $\text{Im } f$ . Alors  $G_2/H$  est un  $G_2$ -ensemble connexe donc  $|\text{Aut}(G_2/H)| \leq [G_2 : H]$ , alors que  $f^*(G_2/H)$  est trivial, et donc  $|\text{Aut}(f^*(G_2/H))| = [G_2 : H]!$ .

Supposons  $\overline{\text{Im } f} = G_2$ . Soit  $\phi : f^*S \rightarrow f^*S'$ .  $\psi(\phi)$  est  $G_1$ -équivariante, donc  $\text{Im } f$ -équivariante. Mais  $\{g \in G_2 \mid \forall x \in f^*(S), \phi(gx) = g\phi(x)\}$  est un sous-groupe fermé de  $G_2$ . Donc  $\psi(\phi)$  est bien  $G_2$ -équivariante, et définit donc un morphisme  $S \rightarrow S'$ .

Si  $f^*$  est une équivalence,  $\text{Aut } f^* \rightarrow \text{Aut } \psi f^*$  est un isomorphisme. Or ce n'est autre que  $f$ .  $\square$

Soient  $\mathcal{B}$  une catégorie et  $F : \mathcal{B} \rightarrow \text{Ens}$  un foncteur. Munissons  $\text{Aut } F$  de la topologie pour laquelle les  $\text{Stab}_{F(S),s}^{\text{Aut } F}$  forment une base de voisinages de 1. Alors  $F$  s'enrichit en un foncteur  $\mathcal{B} \rightarrow \text{Aut } F\text{-Ens}$ .  $(\mathcal{B}, F)$  est une catégorie classifiante pointée si le foncteur  $\mathcal{B} \rightarrow \text{Aut } F\text{-Ens}$  est un isomorphisme. Si  $(\mathcal{B}, F)$  est une catégorie classifiante pointée, et  $F'$  est isomorphe à  $F$ , alors  $(\mathcal{B}, F')$  est aussi une catégorie classifiante pointée. On appellera *catégorie classifiante* un couple  $(\mathcal{B}, \mathcal{F})$  où  $\mathcal{B}$  est une catégorie,  $\mathcal{F}$  une classe d'isomorphisme de foncteurs  $F : \mathcal{B} \rightarrow \text{Ens}$  tels que  $(\mathcal{B}, F)$  soit une catégorie classifiante pointée (un élément  $F$  de  $\mathcal{F}$  sera alors appelé un foncteur fibre de la catégorie classifiante). On notera aussi  $\pi_1(\mathcal{B}, F) = \text{Aut } F$ , muni de sa structure topologique de groupe qpd, qu'on appellera *groupe fondamental* de  $\mathcal{B}$ .

Une catégorie classifiante admet des limites directes, des produits fibrés et tout morphisme se décompose en la composé d'un épimorphisme strict et de l'immersion d'une composante connexe.

Un *1-morphisme* de catégories classifiantes  $f : (\mathcal{B}_1, \mathcal{F}_1) \rightarrow (\mathcal{B}_2, \mathcal{F}_2)$  est un foncteur  $f^* : \mathcal{B}_2 \rightarrow \mathcal{B}_1$  tel qu'il existe un foncteur fibre  $F_1 \in \mathcal{F}_1$  tel que  $F_1 f^*$  soit

dans  $\mathcal{F}_2$ . Ceci vaut alors pour tout  $F'_1 \in \mathcal{F}_1$ ) : en effet si  $\alpha : F_1 \rightarrow F'_1$  est un isomorphisme de foncteurs,  $\alpha \circ f^* : F_1 f^* \rightarrow F'_1 f^*$  est aussi un isomorphisme. Un *2-morphisme* de catégories classifiantes  $\phi : f \rightarrow g$  avec  $f, g : \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2$  est un isomorphisme de foncteur  $f^* \rightarrow g^*$ . Avec ces définitions, les catégories classifiantes forment ainsi une 2-catégorie.

Si  $G$  est un groupe topologique,  $G$ -Ens est naturellement munie d'une structure de catégorie classifiante, de groupe fondamental  $\hat{G}$ . Si  $\mathcal{C}$  est une catégorie galoisienne,  $\text{Ind-}\mathcal{C}$  est aussi naturellement muni d'une structure de catégorie classifiante en prenant pour  $\mathcal{F}$  la classe des foncteurs fondamentaux. Tout foncteur exact de catégories galoisiennes définit un (unique) 1-morphisme de catégories classifiantes.

On a également, plus généralement, une notion de catégorie multiclassifiante. C'est une catégorie  $\mathcal{B}$  munie d'une famille de classes d'isomorphismes  $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$  de foncteurs  $F_i : \mathcal{B} \rightarrow \text{Ens}$ , tels que, si  $F_i \in \mathcal{F}_i$ , le foncteur induit  $\mathcal{C} \rightarrow \prod_{i \in I} \text{Aut}(F_i)$ -Ens soit une équivalence de catégories (en particulier, les foncteurs  $F_i$  sont deux à deux non isomorphes, et donc les classes  $\mathcal{F}_i$  sont disjointes). On notera alors  $\pi_0(\mathcal{B}) := I$  et  $\pi_1(\mathcal{B}, F_i) := \text{Aut } F_i$ . Le facteur direct de  $\mathcal{B}$  qui est la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{B}$  des  $x$  tel que  $F_j(x) = \emptyset$  pour tout  $j \neq i$  est noté  $\mathcal{B}_i$  (il ne dépend pas d'un choix de foncteurs fibres).

Un 1-morphisme de catégories multiclassifiantes  $F : (\mathcal{B}, (F_i)_{i \in I}) \rightarrow (\mathcal{B}', (F'_j)_{j \in J})$  est un foncteur  $F^* : \mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}$  tel que, pour tout  $i \in I$ ,  $F_i F^*$  soit isomorphe à l'un des  $F_j$  ( $j$  est alors nécessairement unique, d'où une fonction  $\pi_0(F) : \pi_0(\mathcal{B}') \rightarrow \pi_0(\mathcal{B})$ , compatible avec la composition de 1-morphismes).

Un 2-morphisme  $u : F \rightarrow G$  de 1-morphismes est un isomorphisme de foncteurs  $F^* \rightarrow G^*$  (alors  $F_i(u) : F_i F^* \rightarrow F_i G^*$  est un isomorphisme, donc  $\pi_0(F) = \pi_0(G)$ ).

Soit  $\mathcal{B}$  une catégorie classifiante, et  $S$  un objet de  $\mathcal{B}$ . On notera  $\mathcal{B}_{/S}$  la catégorie des morphismes  $S' \rightarrow S$ .

Si  $S$  est connexe,  $F$  est un foncteur fibre de  $\mathcal{B}$  et  $s \in F(S)$ , on a un foncteur  $F_s : \mathcal{B}_{/S} \rightarrow \text{Ens}$  défini par  $F_s(\phi : S' \rightarrow S) = F(\phi)^{-1}(\{s\}) \subset F(S')$ . Soit  $H = \text{Stab}_{S,s} \subset G = \pi_1(\mathcal{B}, F)$ , l'action de  $H$  sur  $F(S')$  laisse stable  $F_s(S' \rightarrow S)$  et définit ainsi un morphisme  $H \rightarrow \text{Aut } F_s$  (d'où un foncteur  $\mathcal{B}_{/S} \rightarrow H$ -Ens noté également par abus  $F_s$ ). En identifiant  $\mathcal{B}$  à  $G$ -Ens grâce à  $F$ , le foncteur  $\text{Ind}_G^H : H$ -Ens  $\rightarrow (G$ -Ens) $_{/(G/H)}$  fournit un quasi-inverse à  $F_s$ . Ainsi  $(\mathcal{B}_{/S}, F_s)$  définit une catégorie classifiante (et le foncteur  $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_{/S} : S' \mapsto (S \times S' \rightarrow S)$  définit un 1-morphisme  $\mathcal{B}_{/S} \rightarrow \mathcal{B}$  de catégories classifiantes).

Si  $s'$  est un autre élément de  $F(S)$ , comme  $G$  agit transitivement sur  $F(S)$ , soit  $g \in G$  tel que  $g \cdot s = s'$ . Alors  $g_{F(S')}$  envoie  $F_s(S' \rightarrow S)$  sur  $F_{s'}(S' \rightarrow S)$  et définit ainsi un isomorphisme  $F_s \rightarrow F_{s'}$ . De plus, si  $\alpha : F \rightarrow F'$  est un isomorphisme de foncteurs fibres,  $\alpha$  induit un isomorphisme  $F_s \rightarrow F'_{\alpha(s)}$ . Ainsi la classe d'isomorphisme  $F_s$  ne dépend ni de  $F$ , ni de  $s$ , donc la catégorie classifiante  $\mathcal{B}_{/S}$  est bien définie.

Si  $\psi : \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2$  est un 1-morphisme de catégories classifiantes,  $S_1$  un objet connexe de  $\mathcal{B}_1$ ,  $S_2$  un objet connexe de  $\mathcal{B}_2$  et  $\phi : \psi^*(S_2) \rightarrow S_1$  un morphisme de  $\mathcal{B}_2$ , le foncteur  $\mathcal{B}_{1/S_1} \rightarrow \mathcal{B}_{2/S_2}$  est un morphisme de catégories classifiantes. Pour  $S$  quelconque, on peut décomposer  $S$  comme somme directe de ses composantes connexes  $S = \coprod S_i$ , et on obtient ainsi que  $\mathcal{B}_{/S} = \prod \mathcal{B}_{/S_i}$  est une

catégorie multiclassifiante.

## 4.2 Complexes classifiants de groupes et groupes fondamentaux

### 4.2.1 Complexes classifiants

Soit  $\mathcal{C}$  une petite catégorie. Un *complexe classifiant* sur  $\mathcal{C}$  est une catégorie fibrée  $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{C}$  dont les fibres  $\mathcal{G}_x$  ( $x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ ) sont munies d'une structure de catégorie classifiante, telle que pour toute flèche  $f : x \rightarrow x'$  de  $\mathcal{C}$ ,  $f^*$  soit un morphisme de catégories classifiantes.

Un 1-morphisme  $\psi : \mathcal{G}' \rightarrow \mathcal{G}$  de complexes classifiants sur  $\mathcal{C}$  est un 1-morphisme cartésien de catégories fibrées  $\psi^* : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$  sur  $\mathcal{C}$  tel que pour tout  $x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  le foncteur  $\psi_x^* : \mathcal{G}_x \rightarrow \mathcal{G}'_x$  définisse un 1-morphisme  $\psi_x : \mathcal{G}'_x \rightarrow \mathcal{G}_x$  de catégories classifiantes.

Un 2-morphisme  $u : \psi \rightarrow \psi'$  de 1-morphismes de complexes classifiants sur  $\mathcal{C}$  est un 2-morphisme  $\psi \rightarrow \psi'$  de catégories fibrées sur  $\mathcal{C}$ .

Un 1-morphisme de complexes classifiants  $(\mathcal{G}' \rightarrow \mathcal{C}') \rightarrow (\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{C})$  est donné par un foncteur  $\mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$  et un 1-morphisme  $\mathcal{G}' \rightarrow \mathcal{G} \times_{\mathcal{C}} \mathcal{C}'$  de complexes classifiants sur  $\mathcal{C}'$ . Un 2-morphisme de complexes classifiants est un 2-morphisme de catégories fibrées.

On peut de même définir une notion de complexe multiclassifiant comme catégorie fibrée dont les fibres sont des catégories multiclassifiantes.

*Remarque.* La terminologie de complexe classifiant est choisie pour insister sur le fait que la définition ici présentée est une généralisation de la notion de complexe de groupe tel que l'a définie Haefliger dans [20]. En effet, la donnée d'un complexe de groupes au sens d'Haefliger équivaut à la donnée d'un complexe classifiant  $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{C}$  où  $\mathcal{C}$  est la catégorie des objets d'un ensemble 2-simplicial et où le groupe fondamental  $\pi_1(\mathcal{G}_x)$  de chaque fibre est discret (la définition que l'on donnera du groupe fondamental d'un complexe classifiant correspondra dans le cas d'un tel complexe de groupes à la définition du groupe fondamental d'Haefliger).

On peut trouver aussi une variation du concept d'Haefliger dans [38, § 2.2] pour des complexes (où  $\mathcal{C}$  est toujours la catégorie des objets d'un ensemble 2-simplicial) dont les fibres sont en groupes profinis et les morphismes continus.

Le groupe fondamental que Stix définit alors correspondra à notre  $\pi_1^{\text{alg}}(\mathcal{G})$ .

On pourra aussi regarder [33] où Mochizuki étudie les complexes en groupes profinis dans le cas où la base est un (semi)graphe. Il y définit dans ce cas la notion de groupe fondamental tempéré.

La sous-2-catégorie pleine des complexes classifiants avec  $\mathcal{C}$  discrète est naturellement équivalente à la 2-catégorie des catégories multiclassifiantes.

La donnée d'un complexe classifiant sur  $\mathcal{C}$  muni d'un clivage équivaut, compte tenu de [17, VI.8], à :

- pour tout objet  $x$  de  $\mathcal{C}$ , une catégorie classifiante  $\Pi_x$ ,
- pour toute flèche  $f : x \rightarrow x'$ , un 1-morphisme de catégories classifiantes  $f^* : \Pi_{x'} \rightarrow \Pi_x$  (qui est l'identité si  $f$  est  $\text{Id}_x$ ),
- pour tous  $f, g$  avec  $f : x \rightarrow x'$  et  $g : x' \rightarrow x''$ , un 2-isomorphisme

$$c_{f,g} : (gf)^* \xrightarrow{\sim} f^*g^*$$

vérifiant

$$(f^* \circ c_{h,g}) \cdot c_{f,hg} = (c_{f,g} \circ h^*) \cdot c_{gf,h},$$

ce qui permet d'identifier  $g^*f^*$  et  $(fg)^*$ .

Ces données, vues sur la catégorie de base  $\mathcal{C}^{\text{op}}$ , donnent aussi naissance à une catégorie cofibrée  $\mathcal{G}^\circ$  sur  $\mathcal{C}^{\text{op}}$ .  $\mathcal{G}^\circ$  est alors un topos sur  $\mathcal{C}^{\text{op}}$ .

Si  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{G}'$  sont munis de clivages sur  $\mathcal{C}$ , un 1-morphisme de catégories classifiantes  $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$  équivaut, compte tenu de [17, VI.12], à :

- pour tout  $x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ , un 1-morphisme de catégories classifiantes  $\mathcal{G}_x \rightarrow \mathcal{G}'_x$  donné par un foncteur  $\psi_x : \mathcal{G}'_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ ,
- pour tout  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, x')$ , un isomorphisme de foncteurs  $\phi_f : \psi_x f_{\mathcal{G}'}^* \xrightarrow{\sim} f_{\mathcal{G}}^* \psi_{x'}$ , tels que
  - $\phi_{\text{id}_x} = \text{id}_{\psi_x}$ ,
  - pour tous  $x \xrightarrow{f} x' \xrightarrow{g} x''$ ,  $(c_{f,g}^{\mathcal{G}} \circ \psi_{x''}) \cdot \phi_{gf} = (f_{\mathcal{G}}^* \circ \phi_g) \cdot \phi_f g_{\mathcal{G}'}^* \cdot (\psi_x \circ c_{f,g}^{\mathcal{G}'})$

De même, et plus généralement, un 1-morphisme de catégories classifiantes  $(\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{C}) \rightarrow (\mathcal{G}' \rightarrow \mathcal{C}')$  est donné par :

- un foncteur  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ ,
- pour tout objet  $x$  de  $\mathcal{C}$ , un foncteur  $\psi_x : \mathcal{G}'_{F(x)} \rightarrow \mathcal{G}_x$  correspondant à un 1-morphisme de catégories classifiantes,
- pour tout morphisme  $f : x \rightarrow x'$  dans  $\mathcal{C}$ , un isomorphisme de foncteur  $\phi_f : \psi_x F(f)^* \xrightarrow{\sim} f^* \psi_{x'}$  vérifiant  $\phi_{\text{id}_x} = \text{id}_{\psi_x}$  et la condition de compatibilité avec la composition.

On note

$$\mathcal{B}(\mathcal{G}) := \text{Cart}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}, \mathcal{G}) = \varprojlim \mathcal{G}/\mathcal{C}$$

la catégorie des sections cartésiennes de  $\mathcal{G}$ , qu'on appellera aussi catégorie des revêtements de  $\mathcal{G}$ .

Plus explicitement, étant donné un clivage de  $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{C}$ , un objet  $S$  est donné par :

- pour tout objet  $x$  de  $\mathcal{C}$ , un objet  $S_x$  de  $\mathcal{G}_x$ ,
- pour toute flèche  $f : x \rightarrow x'$ , un isomorphisme  $\alpha_f : f^* S_{x'} \rightarrow S_x$ , tels que pour tous  $g : x \rightarrow x'$ ,  $f : x' \rightarrow x''$ ,  $\alpha_g \cdot g^* \alpha_f = \alpha_{fg}$  (après avoir identifié  $g^* f^* S_x$  et  $(fg)^* S_x$  grâce à  $c_{f,g}$ ).

Un morphisme  $\phi : S \rightarrow S'$  est donné par un morphisme  $\phi_x : S_x \rightarrow S'_x$ , pour tout  $x$ , de manière à ce que, pour tout  $f : x \rightarrow x'$ ,  $\alpha'_f \cdot f^* \phi_{x'} = \phi_x \cdot \alpha_f$ .

$\mathcal{B}(\mathcal{G})$  est un topos localement connexe (compte tenu de [28, 4.1.1, 4.1.2]). En particulier, il admet des limites directes et des produits fibrés (il suffit de les prendre composante par composante). Tout morphisme  $S' \rightarrow S$  se décompose de façon unique comme composé d'un épimorphisme strict  $S' \rightarrow S_0$  (c'est-à-dire  $S' \rightarrow S_0$  est le coégalisateur de  $S' \times_{S_0} S' \rightrightarrows S'$ ) et de l'immersion d'un facteur direct  $S_0 \rightarrow S$  (c'est-à-dire il existe un sous-objet  $S_1$  de  $S$  tel que  $S_0 \coprod S_1 \rightarrow S$  soit un isomorphisme). En particulier tout sous-objet est un facteur direct (comme  $\mathcal{B}(\mathcal{G})$  est localement connexe, tout sous-objet de  $S$  est donc somme direct de composantes de  $S$ ) et tout épimorphisme est strict (on parlera alors simplement de quotient).

Comme exemple de limite directe qui servira par la suite, si  $R$  est une relation

d'équivalence sur  $S$  (c'est-à-dire un sous-objet de  $S \times S$  qui vérifie les propriétés d'une relation d'équivalence), il existe alors un quotient  $S/R$  (c'est-à-dire un épimorphisme strict  $S \rightarrow S/R$  tel que  $S \times_{S/R} S = R$ ), défini composante par composante par  $(S/R)_x = S_x/R_x$  et en recollant grâce à l'isomorphisme naturel  $f^*(S_{x'}/R_{x'}) \simeq f^*(S_{x'})/f^*(R_{x'})$ .

Si  $S$  est un objet de  $\mathcal{B}(\mathcal{G})$ , on peut lui associer la catégorie fibrée  $\mathcal{G}_S$  sur  $\mathcal{C}_S$ , où  $\mathcal{C}_S$  est la catégorie cofibrée sur  $\mathcal{C}$  dont la fibre en  $x$  est la catégorie discrète  $\pi_0(S_x)$ , et  $\mathcal{G}_S$  est la catégorie fibrée sur  $\mathcal{C}_S$  dont la fibre en  $(i, x)$  (où  $S_i$  est une composante connexe de  $S_x$ ) est  $\mathcal{G}_{x/S_i}$ .

$\mathcal{G}_{x/S_i}$  étant muni de sa structure de catégorie classifiante,  $\mathcal{G}_S$  est un complexe classifiant sur  $\mathcal{C}_S$ , et on a un morphisme de complexe classifiant  $\mathcal{G}_S \rightarrow \mathcal{G}$ .

$\mathcal{B}(\mathcal{G}_S)$  est alors naturellement équivalente à  $\mathcal{B}(\mathcal{G})_{/S}$ .

On peut reformuler cela en définissant sur  $\mathcal{C}$  le complexe multiclassifiant  $\mathcal{G}/S$  dont la fibre en  $x$  est la catégorie multiclassifiante  $\mathcal{G}_{x/S_x}$ . A un tel complexe multiclassifiant  $\mathcal{G}_0$  sur une catégorie  $\mathcal{C}$ , on peut alors associer un complexe classifiant  $\mathcal{G}_1$  sur une catégorie  $\mathcal{C}'$  cofibrée sur  $\mathcal{C}$  dont la fibre en  $x$  est  $\pi_0(\mathcal{G}_{0,x})$ , et si  $i \in \pi_0(\mathcal{G}_{0,x})$ ,  $\mathcal{G}_{1,(x,i)}$  est le facteur direct  $\mathcal{G}_{0,x,i}$  de  $\mathcal{G}_{0,x}$ .

On appellera *point géométrique*  $\bar{x} = (x, F)$  de  $\mathcal{G}$  la donnée d'un objet  $x$  de  $\mathcal{C}$  et d'un foncteur fibre  $F$  de  $\mathcal{G}_x$ .

Si  $\bar{x} = (x, F)$  est un point géométrique de  $\mathcal{G}$ , on a un foncteur  $F_{\bar{x}} : \mathcal{B}(\mathcal{G}) \rightarrow \text{Ens}$  qui à  $S \in \mathcal{B}(\mathcal{G}) : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{G}$  associe  $F(S_x)$ . Ce foncteur est appelé foncteur fibre en  $\bar{x}$ . Il commute aux limites directes et aux produits fibrés.

**Proposition 4.2.1.** *Si  $\mathcal{C}$  est une catégorie connexe et  $\bar{x}$  et  $\bar{x}'$  sont deux points géométriques de  $\mathcal{G}$ , alors  $F_{\bar{x}}$  et  $F_{\bar{x}'}$  sont isomorphes.*

*Démonstration.* Posons  $(x, F) = \bar{x}$  et  $(x', F') = \bar{x}'$ . Supposons qu'il existe un morphisme  $f : x \rightarrow x'$  dans  $\mathcal{C}$ . Comme  $f^* : \mathcal{G}_{x'} \rightarrow \mathcal{G}_x$  est un morphisme de catégories classifiantes, il existe un isomorphisme  $\alpha : Ff^* \rightarrow F'$ .

Or le morphisme naturel  $\beta(S) : S(x) \rightarrow f^*(S(x'))$  est un isomorphisme car  $S$  est une section cartésienne.

$(F \circ \beta)(S) : F(S(x)) = F_{\bar{x}}(S) \rightarrow Ff^*(S(x'))$  est un isomorphisme, donc  $\alpha \cdot (F \circ \beta)(S) : F_{\bar{x}}(S) \rightarrow F'(S(x')) = F_{\bar{x}'}(S)$  est un isomorphisme, et donc  $\alpha \cdot (F \circ \beta)$  fournit un isomorphisme  $F_{\bar{x}} \rightarrow F_{\bar{x}'}$ .

Dans le cas général, comme  $\mathcal{C}$  est connexe, on peut trouver une chaîne d'objets  $x, x_1, \dots, x_n, x'$  reliés par des morphismes (dans un sens ou dans l'autre), on obtient par ce qui précède que  $F_{\bar{x}_i}$  et  $F_{\bar{x}_{i+1}}$  sont isomorphes. On compose des isomorphismes pour obtenir un isomorphisme entre  $F_{\bar{x}}$  et  $F_{\bar{x}'}$ .  $\square$

On appelle *chemin* de  $\bar{x}$  à  $\bar{x}'$  un tel isomorphisme  $F_{\bar{x}} \rightarrow F_{\bar{x}'}$ .

Si  $\psi : \mathcal{G}' \rightarrow \mathcal{G}$  est un 1-morphisme de complexes classifiants sur  $\mathcal{C}$ ,  $S \mapsto S \circ \psi^*$  définit un foncteur également noté  $\psi^* : \mathcal{B}(\mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{G}')$ .

Si  $\psi : (\mathcal{G}' \rightarrow \mathcal{C}') \rightarrow (\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{C})$  est un 1-morphisme de complexes classifiants donné par un morphisme  $\psi_0 : \mathcal{G}' \rightarrow \mathcal{G} \times_{\mathcal{C}} \mathcal{C}'$  de complexes classifiants sur  $\mathcal{C}'$ ,  $S \mapsto \psi_0^*(S \times_{\mathcal{C}} \mathcal{C}')$  définit un foncteur  $\psi^* : \mathcal{B}(\mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{G}')$ .

Si  $u : \psi_1 \rightarrow \psi_2$  est un 2-morphisme, il définit un isomorphisme de foncteurs  $u : \psi_1^* \rightarrow \psi_2^*$ .

Si  $\bar{x}'$  est un point géométrique  $(x', F')$  de  $\mathcal{G}'$ , soit  $\psi(x)$  l'image dans  $\mathcal{C}$  de  $x \in \text{Ob}(\mathcal{C}')$  et soit  $F$  la composée  $\mathcal{G}_x \rightarrow \mathcal{G}'_{x'} \xrightarrow{F} \text{Ens}$ . Alors  $\psi_*(\bar{x}') := \bar{x} = (x, F)$  est un point géométrique de  $\mathcal{G}$ , et  $F_{\bar{x}} = F_{\bar{x}'} \circ \psi^*$ .

Si  $\alpha$  est un chemin de  $\bar{x}'_1$  à  $\bar{x}'_2$  (c'est-à-dire un isomorphisme  $\alpha : F_{\bar{x}'_1} \rightarrow F_{\bar{x}'_2}$ ), on a un chemin  $\psi_*(\alpha)$  de  $\psi_*(\bar{x}'_1)$  à  $\psi_*(\bar{x}'_2)$  défini par  $\psi_*(\alpha)(S) = \alpha(\psi^*(S))$  et  $\psi_*$  est bien évidemment compatible à la composition des chemins.

D'où en particulier un homomorphisme  $\psi_* : \text{Aut } F_{\bar{x}'} \rightarrow \text{Aut } F_{\psi_*(\bar{x}')}.$

## 4.2.2 Groupe fondamental

Soit  $\mathcal{G}$  un complexe classifiant sur  $\mathcal{C}$  et soit  $\bar{x} = (x, F)$  un point géométrique de  $\mathcal{G}$ .

On appelle *groupe fondamental* de  $\mathcal{G}$  en  $\bar{x}$  le groupe :

$$\pi_1(\mathcal{G}, \bar{x}) = \text{Aut } F_{\bar{x}}.$$

C'est un groupe topologique, pour lequel les sous-groupes  $\text{Stab}_{S,s}$  ( $S \in \mathcal{B}(\mathcal{G})$ ,  $s \in F_{\bar{x}}(S)$ ) forment une base de voisinages de 1 (les  $\text{Stab}_{S,s}$  sont stables par intersection grâce à l'existence de produits fibrés, et par conjugaison en remplaçant  $s$  par  $s'$ ).

L'existence de chemins montre que, à isomorphisme près,  $\pi_1(\mathcal{G}, \bar{x})$  ne dépend pas de  $\bar{x}$ .

**Théorème 4.2.2.** *Le foncteur  $F_{\bar{x}} : \mathcal{B}(\mathcal{G}) \rightarrow \pi_1(\mathcal{G}, \bar{x})\text{-Ens}$  est une équivalence de catégories.*

*Démonstration.* Si  $S \in \mathcal{B}(\mathcal{G})$  est connexe, alors  $\mathcal{C}_S$  est une catégorie connexe. notons  $f : \mathcal{G}_S \rightarrow \mathcal{G}$  le morphisme de catégories fibrées en catégories classifiantes. Notons  $S_x = \coprod S_i$  la décomposition en composantes connexes de  $S_x$ . Si  $s_1, s_2 \in F_{\bar{x}}(S)$  (avec  $s_1 \in F_{\bar{x}}(S_1), s_2 \in F_{\bar{x}}(S_2)$ ), alors  $(S_1, F_{s_1})$  et  $(S_2, F_{s_2})$  sont des foncteurs fibres de  $\mathcal{G}_S$ . D'après la proposition 4.2.1, il existe un chemin  $\alpha$  de  $(S_1, F_{s_1})$  vers  $(S_2, F_{s_2})$ .  $f_*(\alpha) \in \pi_1(\mathcal{G}, \bar{x})$  est tel que  $f_*(\alpha)s_1 = s_2$ . En résumé on a donc obtenu que si  $S$  est connexe,  $F_{\bar{x}}(S)$  est un  $\pi_1(\mathcal{G}, \bar{x})$ -ensemble connexe. Donc, pour tout  $S$ ,  $F_{\bar{x}}$  induit une bijection entre l'ensemble des composantes connexes de  $S$  et l'ensemble des composantes connexes de  $F_{\bar{x}}(S)$ , ainsi qu'une bijection entre les sous-objets de  $S$  et les sous-objets de  $F_{\bar{x}}(S)$  (car tout sous-objet est union de composantes connexes).

On en déduit aisément que  $F_{\bar{x}} : \mathcal{B}(\mathcal{G}) \rightarrow \pi_1(\mathcal{G}, \bar{x})\text{-Ens}$  est pleinement fidèle, car

$$\text{Hom}(S, S') = \left\{ \begin{array}{l} \text{sous-objets } U \text{ de } S \times S' \\ \text{tel que } U \rightarrow S \text{ soit un isomorphisme} \end{array} \right\},$$

$F_{\bar{x}}(S \times S') = F_{\bar{x}}(S) \times F_{\bar{x}}(S')$  et  $F_{\bar{x}}(U \rightarrow S)$  est un isomorphisme si et seulement si  $U \rightarrow S$  est un isomorphisme.

Comme les sommes directes existent dans  $\mathcal{B}(\mathcal{G})$ , il ne reste plus qu'à montrer qu'un  $\pi_1(\mathcal{G}, \bar{x})$ -ensemble connexe  $\pi_1(\mathcal{G}, \bar{x})/H$ , où  $H$  est un sous-groupe ouvert de  $\pi_1(\mathcal{G}, \bar{x})$ , est dans l'image essentielle de  $F_{\bar{x}}$ . Or puisque  $H$  est ouvert,  $H$  contient un sous-groupe de la forme  $\text{Stab}_{S',s'}$  pour un certain  $S' \in \text{Ob}(\mathcal{B}(\mathcal{G}))$  et  $s' \in F_{\bar{x}}(S')$  (comme  $\text{Stab}_{S',s'} \subset H$ , on a un unique morphisme  $G/H \rightarrow F_{\bar{x}}(S')$  qui envoie  $H$  en  $s'$ ). Soit  $R$  la réunion des composantes connexes de

$S' \times S'$  correspondant à l'union des composantes connexes  $F_{\bar{x}}(R) = F_{\bar{x}}(S') \times_{G/H} F_{\bar{x}}(S') \subset F_{\bar{x}}(S') \times F_{\bar{x}}(S')$ .  $R$  est une relation d'équivalence sur  $S'$  et le quotient  $S'/R$  existe dans  $\mathcal{B}(\mathcal{G})$ . On a bien  $F_{\bar{x}}(S'/R) = \pi_1(\mathcal{G}, \bar{X})/H$ .  $\square$

Ainsi  $(\mathcal{B}(\mathcal{G}), F_x)$  est une catégorie classifiante. De plus, si  $\bar{x}$  et  $\bar{x}'$  sont deux points géométriques de  $\mathcal{G}$ ,  $F_{\bar{x}}$  et  $F_{\bar{x}'}$  sont isomorphes, donc la structure de catégorie classifiante sur  $\mathcal{B}(\mathcal{G})$  est indépendante du point géométrique.

### 4.3 Sous-catégories d'une catégorie classifiante et applications

Soient  $\mathcal{B}$  une catégorie classifiante et  $\mathcal{B}'$  une sous-catégorie pleine qui contient l'objet final de  $\mathcal{B}$ , stable par sous-objets, par produits fibrés, et par quotients.

Donnons quelques exemples :

- la sous-catégorie pleine  $\mathcal{B}^{\text{pd}}$  des objets  $S$  localement constants du topos  $\mathcal{B}$ . Si  $\mathcal{B} = G\text{-Ens}$ , un objet  $S$  est localement constant si et seulement si il existe un objet  $S'$  tel que  $S \times S' \rightarrow S'$  soit constant, c'est-à-dire tel que  $S \times S'$  soit isomorphe à une somme disjointe de copies de  $S'$ , en tant qu'objets au-dessus de  $S'$ .  $S'$  peut alors être choisi connexe, donc isomorphe à  $G/H$  où  $H$  est un sous-groupe ouvert de  $G$ . Un objet  $S$  est constant au-dessus de  $G/H$  si et seulement si, pour tout  $s \in S$ ,  $\text{Stab}_s \subset H$  (ceci implique en particulier que, pour tout  $s \in S$ ,  $\text{Stab}_s \subset \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$ , et donc  $H$  peut être choisi distingué).
- la sous-catégorie pleine  $\mathcal{B}^{\text{alg}}$  des objets  $S$  de  $\mathcal{B}$  tel que  $F(S)$  est fini (où  $F$  est un foncteur fibre de  $\mathcal{B}$ ) ; on dira alors que  $S$  est fini. C'est une catégorie galoisienne.

Dans le cas où  $\mathcal{B}$  est la catégorie  $\mathcal{B}(\mathcal{G})$  des revêtements d'un complexe classifiant,  $\mathcal{B}^{\text{alg}}$  peut aussi être vue comme la catégorie des sections cartésiennes de la catégorie fibrée  $\mathcal{G}^{\text{alg}}$  dont la fibre en  $x$  est la catégorie  $\mathcal{G}_x^{\text{alg}}$  des objets finis de  $\mathcal{G}_x$ .

- Plus généralement, soit  $\mathbb{L}$  un ensemble de nombres premiers, la catégorie  $\mathcal{B}^{\mathbb{L}}$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{B}^{\text{alg}}$  composée des objets finis dont le cardinal de la clôture galoisienne soit un produit de nombre premiers dans  $\mathbb{L}$ . Un objet  $\mathcal{B}^{\mathbb{L}}$  sera dit  $\mathbb{L}$ -fini.  $\mathcal{B}^{\mathbb{L}}$  est également une catégorie galoisienne. Dans le cas où  $\mathcal{B}$  est la catégorie  $\mathcal{B}(\mathcal{G})$  des revêtements d'un complexe classifiant,  $\mathcal{B}^{\mathbb{L}}$  peut aussi être vue comme la catégorie des sections cartésiennes de la catégorie fibrée  $\mathcal{G}^{\mathbb{L}}$  dont la fibre en  $x$  est la catégorie  $\mathcal{G}_x^{\mathbb{L}}$  des objets  $\mathbb{L}$ -finis de  $\mathcal{G}_x$ .
- Soit  $\mathcal{B}(\mathcal{G})$  un complexe classifiant, la sous-catégorie pleine  $\mathcal{B}^{\text{top}}(\mathcal{G})$  de  $\mathcal{B}(\mathcal{G})$  dont les objets  $S$  sont les revêtements catégoriquement topologiques de  $\mathcal{G}$ , c'est-à-dire ceux tels que, pour tout  $x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ ,  $S_x$  soit scindé (c'est-à-dire somme directe de copies de l'objet final de  $\mathcal{G}_x$ ).
- La sous-catégorie pleine  $\mathcal{B}^{\text{temp}}(\mathcal{G})^{\mathbb{L}}$  de  $\mathcal{B}(\mathcal{G})$  constituée des objets  $S$  de  $\mathcal{B}(\mathcal{G})$  tel qu'il existe un objet  $S'$   $\mathbb{L}$ -fini non vide tel que  $S' \times S \rightarrow S'$ , considéré comme objet de  $\mathcal{B}(\mathcal{G}_{S'})$  grâce à l'équivalence de catégorie  $\mathcal{B}(\mathcal{G})_{/S'} \simeq \mathcal{B}(\mathcal{G}_{S'})$ , soit un revêtement catégoriquement topologique de  $\mathcal{G}_{S'}$  (si  $\mathbb{L}$  est l'ensemble de tous les nombres premiers, on omettra l'exposant  $\mathbb{L}$  de la

notation). Les objets de  $\mathcal{B}^{\text{temp}}(\mathcal{G})^{\mathbb{L}}$  sont appelés *revêtements catégoriquement tempérés* pro- $\mathbb{L}$ .

Si  $\mathcal{B}''$  désigne la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{B}$  dont les objets sont des sommes directes d'objets de  $\mathcal{B}'$ , alors  $\mathcal{B}''$  est encore stable par sous-objets, par produits fibrés et par quotients, et est de plus stable par somme directe.

Soit  $F$  un foncteur fibre de  $\mathcal{B}$ , soient  $F'$  et  $F''$  ses restrictions à  $\mathcal{B}'$  et à  $\mathcal{B}''$ . Alors  $\text{Aut } F' = \text{Aut } F''$  et on a un morphisme continu évident  $\text{Aut } F \rightarrow \text{Aut } F'$ .

**Proposition 4.3.1.**  $F'' : \mathcal{B}'' \rightarrow (\text{Aut } F'')$  -Ens est une équivalence de catégories.

*Démonstration.* Soit  $S$  un objet connexe de  $\mathcal{B}''$ . Il est connexe en tant qu'objet de  $\mathcal{B}$ , donc  $\text{Aut } F$  agit déjà transitivement sur l'ensemble  $F(S) = F''(S)$ , donc  $\text{Aut } F''$  aussi.  $F''(S)$  est donc un  $\text{Aut } F''$ -ensemble connexe. Donc, pour tout  $S$ ,  $F''$  induit une bijection entre l'ensemble des composantes connexes de  $S$  et  $F''(S)$ . On en déduit que  $F''$  est pleinement fidèle (par le même argument que dans la démonstration du théorème 4.2.2).

Soit  $T$  un  $(\text{Aut } F'')$ -ensemble. Il faut montrer qu'il existe  $S$  tel que  $F''(S)$  soit isomorphe à  $T$ . Comme  $F''$  commute aux sommes directes et que  $\mathcal{B}''$  admet des sommes directes, on peut supposer  $T$  connexe :  $T = (\text{Aut } F'')/H$  où  $H$  est un sous-groupe ouvert de  $\text{Aut } F''$  et contient donc un  $\text{Stab}_{S',s'}$  avec  $S' \in \text{Ob}(\mathcal{B}'')$  et  $s' \in F'(S')$ . On peut définir une relation d'équivalence sur  $S'$  comme le sous-objet  $R$  de  $S' \times S'$  tel que  $F''(R) = F''(S') \times_T F''(S') \subset F''(S' \times S')$  (il existe bien un tel  $R$  car  $F''(S') \times_T F''(S')$  est un sous-objet de  $F''(S' \times S')$  et  $F''$  induit une bijection entre les sous-objets de  $S' \times S'$  et ceux de  $F''(S' \times S')$ ). Comme  $\mathcal{B}''$  est stable par quotients,  $S = S'/R$  est un objet de  $\mathcal{B}''$  et  $F''(S) \simeq F''(S')/F''(R) \simeq T$ .  $\square$

De plus, si  $\alpha F_1 \simeq F_2$  est un isomorphisme de foncteurs fibres de  $\mathcal{B}$ , la restriction de  $\alpha$  à  $\mathcal{B}''$  définit un isomorphisme  $F_1'' \simeq F_2''$ .

Ainsi  $\mathcal{B}''$  est muni d'une structure naturelle de catégorie classifiante.

Dans les exemples ci-dessus, le groupe  $\text{Aut } F' = \pi_1(\mathcal{B}'', F'')$  est noté de la manière suivante (en supposant dans les cas issus d'un complexe classifiant,  $F = F_{\bar{x}}$  pour  $x$  un point géométrique  $\bar{x}$  de  $\mathcal{G}$ ) :

- $\pi_1^{\text{pd}}(\mathcal{B}, F)$  si  $\mathcal{B}'$  est la sous-catégorie pleines des objets localement constants de  $\mathcal{B}$ .  $\pi_1^{\text{pd}}(\mathcal{B}, F)$  est alors le complété prodiscret de  $\pi_1(\mathcal{B}, F)$ , c'est-à-dire  $\pi_1^{\text{pd}}(\mathcal{B}, F) = \varprojlim_H \pi_1(\mathcal{B}, F)/H$  où  $H$  décrit les sous-groupes ouverts distingués de  $\pi_1(\mathcal{B}, F)$ .
- $\pi_1^{\text{alg}}(\mathcal{B}, F)$  si  $\mathcal{B}'$  est la sous-catégorie pleine des objets finis de  $\mathcal{B}$ .  $\pi_1^{\text{alg}}(\mathcal{B}, F)$  est alors le complété profini de  $\pi_1(\mathcal{B}, F)$ .
- $\pi_1(\mathcal{B}, F)^{\mathbb{L}}$  si  $\mathcal{B}'$  est la sous-catégorie pleine des objets  $\mathbb{L}$ -finis de  $\mathcal{B}$ .  $\pi_1(\mathcal{B}, F)^{\mathbb{L}}$  est alors le complété pro- $\mathbb{L}$  de  $\pi_1(\mathcal{B}, F)$ .
- $\pi_1^{\text{top}}(\mathcal{G}, \bar{x})$  si  $\mathcal{B}'$  est la sous-catégorie pleine des revêtements catégoriquement topologiques de  $\mathcal{G}$ .
- $\pi_1^{\text{temp}}(\mathcal{G}, \bar{x})^{\mathbb{L}}$  si  $\mathcal{B}'$  est la sous-catégorie pleine des revêtements catégoriquement tempérés pro- $\mathbb{L}$  de  $\mathcal{G}$ .

Si  $\mathcal{C}$  est une petite catégorie, on peut définir un complexe classifiant sur  $\mathcal{C}$  (qui sera noté  $\underline{\mathcal{C}}$ ) en considérant la catégorie fibrée  $\text{Ens} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  : les catégories fibres



sont canoniquement isomorphes à  $\text{Ens}$  qu'on munit de sa structure de catégorie classifiante évidente. Tout revêtement de  $\mathcal{C}$  est catégoriquement topologique.

Si  $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{C}$  est un complexe classifiant sur  $\mathcal{C}$ , on a un unique morphisme  $\mathcal{G} \rightarrow \underline{\mathcal{C}}$  de complexes classifiants sur  $\mathcal{C}$  défini sur une fibre par le foncteur  $\text{Ens} \rightarrow \mathcal{G}_x$  qui à un ensemble  $S$  associe  $\coprod_S e_x$  où  $e_x$  est l'objet final de  $\mathcal{G}_x$ .

Le foncteur induit  $\mathcal{B}(\underline{\mathcal{C}}) = \mathcal{B}^{\text{top}}(\underline{\mathcal{C}}) \rightarrow \mathcal{B}^{\text{top}}(\mathcal{G})$  est alors une équivalence de catégories (en fait  $\mathcal{B}^{\text{top}}(\mathcal{G})$  a été définie comme l'image essentielle de ce foncteur).

Le groupe fondamental  $\pi_1^{\text{top}}(\mathcal{G}, \bar{x})$  ne dépend en particulier que de  $\mathcal{C}$  et de  $x$ , et est noté  $\pi_1^{\text{top}}(\mathcal{C}, x)$  pour cette raison.

Si  $X$  est un espace topologique localement contractile, on notera  $\text{Cov}(X)$  la catégorie de ces revêtements.

Soit  $|N(\mathcal{C})|$  la réalisation géométrique du nerf de  $\mathcal{C}$ , le foncteur  $\text{Cov}(|N(\mathcal{C})|) \rightarrow \mathcal{B}^{\text{top}}(\underline{\mathcal{C}})$  qui à  $S \in \text{Ob}(\text{Cov}(|N(\mathcal{C})|))$  associe en  $x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  l'ensemble  $S_x$  et à  $f : x \rightarrow x'$  l'isomorphisme  $S_{x'} \rightarrow S_x$  obtenu par monodromie le long de l'arête de  $N(\mathcal{C})$  correspondant à  $f$ , est une équivalence de catégories.

Ceci justifie la dénomination de revêtement (catégoriquement) topologique.

On en déduit également que  $\pi_1^{\text{top}}(\mathcal{C}, x)$  est discret et l'existence d'un revêtement catégoriquement topologique universel.

**Exemples.** – Si  $\mathcal{C}$  n'a qu'un objet  $x$ , alors  $\pi_1^{\text{top}}(\mathcal{C}, x) = (\text{End}(x))^{\text{gp}}$ .

En effet, un revêtement topologique de  $\mathcal{C}$ , est la donnée d'un ensemble  $S$ , et pour tout morphisme  $f \in \text{End}(x)$  d'une permutation  $f^*$  de  $S$  telle que  $f^*g^* = g^*f^*$ . En remplaçant  $f^*$  par  $f_* = (f^*)^{-1}$ , ceci revient donc à se donner un ensemble  $S$  avec un morphisme de monoïdes  $\text{End}(x) \rightarrow \text{Aut}(S)$ , ce qui revient encore à ce donner un morphisme de groupe  $\text{End}(x)^{\text{gp}} \rightarrow \text{Aut}(S)$ . Donc un revêtement de  $\mathcal{C}$  n'est autre qu'un  $\text{End}(x)^{\text{gp}}$ -ensemble (et la correspondance est clairement compatible aux morphismes), ce qui implique  $\pi_1^{\text{top}}(\mathcal{C}, x) = (\text{End}(x))^{\text{gp}}$ .

– Plus généralement, si  $\mathcal{C}$  est une catégorie connexe quelconque, soit  $\mathcal{C}^\pm$  la catégorie  $\mathcal{C}[\Sigma^{-1}]$  des fractions de  $\mathcal{C}$  obtenu en inversant la classe  $\Sigma$  de tous les morphismes de  $\mathcal{C}$  (c'est un groupoïde).

Alors, si  $x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ ,  $\pi_1^{\text{top}}(\mathcal{C}, x) = \text{Aut}_{\mathcal{C}^\pm}(x)$  (où  $x$  est vu à droite comme objet de  $\mathcal{C}^\pm$ ). En effet si  $S$  est un revêtement topologique de  $\mathcal{C}$ , pour tout  $f \in \mathcal{C}$ , on peut définir  $(f^{-1})^* := (f^*)^{-1}$ , ce qui permet de prolonger  $S$  de façon unique en un revêtement topologique de  $\mathcal{C}^\pm$ . On en déduit que  $\mathcal{B}^{\text{top}}(\mathcal{C}^\pm) \rightarrow \mathcal{B}^{\text{top}}\mathcal{C}$  est une équivalence. Comme  $\mathcal{C}^\pm$  est équivalente à une catégorie ayant un seul élément on se ramène au cas précédent.

– Si  $\mathcal{C}$  est la catégorie  $\Delta/C$  des simplexes d'un complexe simplicial  $C$ ,  $\pi_1^{\text{top}}(\mathcal{C})$  est le groupe fondamental de la réalisation géométrique de  $C$ . En effet  $N(\mathcal{C})$  est la subdivision barycentrique de  $C$ , d'où un homéomorphisme  $|N(\mathcal{C})| \rightarrow |C|$ . On conclut alors avec les résultats de la discussion précédant ces exemples.

Pour les revêtements tempérés pro- $\mathbb{L}$ , on a par définition que pour tout revêtement tempéré pro- $\mathbb{L}$  connexe  $S$ , il existe un revêtement  $\mathbb{L}$ -fini  $S'$  non vide tel que  $S' \times S \rightarrow S'$  soit un revêtement catégoriquement topologique (on peut de plus supposer  $S'$  connexe et même galoisien car tout objet est dominé par un objet galoisien dans la catégorie classifiante  $\mathcal{B}(\mathcal{G})^{\mathbb{L}}$  par finitude, puisque c'est

une catégorie galoisienne).

Soient  $F$  un foncteur fibre de  $\mathcal{B}(\mathcal{G})$ .  $s \in F(S)$  et  $s' \in F(S')$ . Soit  $(S'^\infty, s'^\infty)$  le revêtement catégoriquement topologique universel de  $(S', s')$ . Alors comme  $(S' \times S, (s', s)) \rightarrow (S', s')$  est un revêtement catégoriquement topologique, le revêtement catégoriquement topologique universel de  $S'$  se factorise en  $(S'^\infty, s'^\infty) \rightarrow (S' \times S, (s', s)) \rightarrow (S', s')$ , d'où un morphisme  $(S'^\infty, s'^\infty) \rightarrow (S, s)$  dans  $\mathcal{B}(\mathcal{G})^\mathbb{L}$ . Or le revêtement catégoriquement topologique universel d'un revêtement galoisien est galoisien, donc tout revêtement tempéré pro- $\mathbb{L}$  est dominé par un revêtement galoisien :  $\pi_1^{\text{temp}}(\mathcal{G})^\mathbb{L}$  est pro-discret.

De plus, si  $\{(S_i, s_i)\}$  est une famille cofinale de revêtements  $\mathbb{L}$ -finis galoisiens, et en notant  $\{(S_i^\infty, s_i^\infty)\}$  la famille de leurs revêtements universels, on en déduit un isomorphisme :

$$\pi_1^{\text{temp}}(\mathcal{G}, F) = \varprojlim \text{Gal}(S_i^\infty).$$

Il est à remarquer que, en général,  $\pi_1^{\text{temp}}(\mathcal{G})^\mathbb{L}$  ne peut pas être reconstruit à partir de  $\pi_1^{\text{temp}}(\mathcal{G})$ . Ainsi, soit  $\mathbb{L}$  qui ne contienne pas 2. Si  $\mathcal{C}_1$  est la catégorie triviale à un élément et  $\mathcal{G}_1 = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}\text{-Ens}$ ,  $\pi_1^{\text{temp}}(\mathcal{G}_1) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$  et  $\pi_1^{\text{temp}}(\mathcal{G}_1)^\mathbb{L} = \{1\}$ , alors que si  $\mathcal{C}_2$  est la catégorie à un élément ayant  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$  comme monoïde d'endomorphismes et  $\mathcal{G}_2$  est le complexe classifiant trivial sur  $\mathcal{C}_2$ ,  $\pi_1^{\text{temp}}(\mathcal{G}_2) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$  et  $\pi_1^{\text{temp}}(\mathcal{G}_2)^\mathbb{L} = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ .

## 4.4 Complexes $l$ -polysimpliciaux classifiants et groupe fondamental tempéré

Nous renvoyons au paragraphe 1.4 pour la définition de la catégorie polysimpliciale  $\mathbf{A}$ .

Soit  $l$  un entier naturel. Soit  $C$  un foncteur  $(\mathbf{A}^l)^{\text{op}} \rightarrow \text{Ens}$ . On dira que  $C$  est un *ensemble  $l$ -polysimplicial*. Soit  $\mathbf{A}^{l\circ} \text{Ens}$  la catégorie des ensembles  $l$ -polysimpliciaux.

Le foncteur  $\square^{l-1} : \mathbf{A}^l \rightarrow \mathbf{A}$  qui envoie  $(x_1, \dots, x_l)$  sur  $x_1 \square \dots \square x_l$  s'étend en un foncteur  $\square^{l-1} : \mathbf{A}^{l\circ} \text{Ens} \rightarrow \mathbf{A}^\circ \text{Ens}$  qui commute aux limites inductives. En le composant avec le foncteur réalisation géométrique, on obtient un foncteur  $|| : \mathbf{A}^{l\circ} \text{Ens} \rightarrow \mathcal{K}e$  qui commute également aux limites inductives (on l'appellera aussi réalisation géométrique).

Notons  $\mathbf{A}^l/C$  la catégorie dont les objets sont les couples  $(x, y)$  où  $x$  est un objet de  $\mathbf{A}^l$  et  $y$  appartient à  $C_x$ . Un morphisme  $(x, y) \rightarrow (x', y')$  est un morphisme  $f \in \text{Hom}_{\mathbf{A}^l}(x, x')$  tel que  $f^*(y') = y$ .

Un complexe classifiant  $\mathcal{G}$  sur  $(\mathbf{A}^l/C)^{\text{op}}$  sera alors appelé un complexe classifiant  $l$ -polysimplicial sur  $C$ .

Un 1-morphisme de complexes  $l$ -polysimpliciaux classifiants  $(\mathcal{G}, C) \rightarrow (\mathcal{G}', C')$  est donné par un morphisme  $C \rightarrow C'$  d'ensembles  $l$ -polysimpliciaux et un morphisme de complexes classifiants  $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}' \times_{(\mathbf{A}^l/C')^{\text{op}}} (\mathbf{A}^l/C)^{\text{op}}$ .

Si  $S$  est un objet de  $\mathcal{B}(\mathcal{G})$ , on a un foncteur  $D_S : (\mathbf{A}^l/C)^{\text{op}} \rightarrow \text{Ens}$  qui à  $x$  associe  $\pi_0(S_x)$ . Cette donnée permet de construire un ensemble  $l$ -polysimplicial  $C_S = C \square D_S$  défini par  $(C \square D_S)_\mathbf{n} = \coprod_{x \in C_\mathbf{n}} D_S(x)$ . On a alors  $(\mathbf{A}^l/(C \square D_S))^{\text{op}} = ((\mathbf{A}^l/C)^{\text{op}})_S$ , ce qui permet de donner à  $\mathcal{G}_S$  une structure naturelle de complexe

$l$ -polysimplicial. Cette construction est fonctorielle en  $S$ .

On a un foncteur  $F : \text{Cov}(|C|) \rightarrow \mathcal{B}^{\text{top}}(\Lambda^l/C)$ , qui à un revêtement topologique  $\underline{S}$  de  $|C|$  associe le revêtement topologique de  $\Lambda^l/C$  défini de la façon suivante :

- pour  $\alpha_x : x \rightarrow C \in \text{Ob}(\Lambda^l/C)$ ,  $F(\underline{S})_{\alpha_x} = \pi_0(|\alpha_x|^* \underline{S})$  (il est à remarquer que comme  $|x|$  est contractile,  $|\alpha_x|^* \underline{S}$  est un ensemble de copies de  $|x|$ ) ;
- si  $f : x' \rightarrow x$  est un morphisme de  $\Lambda^l/C$ ,  $F(f)$  est la bijection  $|f|^* : |\alpha_x|^* \underline{S} \rightarrow |\alpha_{x'}|^* \underline{S}$ .

Si  $x$  est un objet de  $\Lambda^l/C$ ,  $F_x F$  est naturellement isomorphe au foncteur fibre en  $y$  pour tout point  $y \in |C|$  dans l'image de  $|x|$ .

**Lemme 4.4.1.** *Le foncteur  $F$  est pleinement fidèle.*

*Démonstration.* On a un foncteur  $G : \mathcal{B}^{\text{top}}(\Lambda/C) \rightarrow \mathcal{Top}/|C|$ , commutant aux limites inductives, qui à  $S$  associe  $|D_S|$ . On a, fonctoriellement en  $S$ ,

$$\begin{aligned} GF(S) &= \text{Coker}(\coprod_{y \in N_1(\Lambda^l/F(S))} |y| \rightrightarrows \coprod_{x \in N_0(\Lambda^l/F(S))} |x|) \\ &= \text{Coker}(S \times_{|C|} \coprod_{y \in N_1(\Lambda^l/C)} |y| \rightrightarrows S \times_{|C|} \coprod_{x \in N_0(\Lambda^l/C)} |x|) \\ &= S. \end{aligned}$$

Donc  $GF$  est isomorphe au plongement usuel  $\text{Cov}^{\text{top}}(|C|) \rightarrow \mathcal{Top}/|C|$ , qui est pleinement fidèle. Donc  $F$  est bien pleinement fidèle.  $\square$

Ainsi  $\text{Cov}^{\text{top}}(|C|)$  s'identifie à une sous-catégorie pleine de  $\mathcal{B}(\mathcal{G})$ , stable par sous-objets, produit fibrés et quotients.

Un revêtement de  $\mathcal{G}$  qui est dans l'image effective de ce foncteur sera dit *topologique*. On notera aussi  $\mathcal{B}^{\text{top}}(\mathcal{G}) = \mathcal{B}^{\text{top}}(C)$  la sous-catégorie pleine en question et  $\pi_1^{\text{top}}(\mathcal{G}) = \pi_1^{\text{top}}(C) = \pi_1^{\text{top}}(|C|)$  son groupe fondamental topologique.

Un objet  $S$  de  $\mathcal{B}(\mathcal{G})$  est appelé revêtement tempéré pro- $\mathbb{L}$  s'il existe un revêtement  $S'$   $\mathbb{L}$ -fini non vide tel que  $S' \times S \rightarrow S'$ , considéré comme objet de  $\mathcal{B}(\mathcal{G}_{S'})$  grâce à l'équivalence de catégories  $\mathcal{B}(\mathcal{G})_{/S'} \simeq \mathcal{B}(\mathcal{G}_{S'})$ , soit un revêtement topologique de  $\mathcal{G}_{S'}$  (si  $\mathbb{L}$  est l'ensemble de tous les nombres premiers, on omettra l'exposant  $\mathbb{L}$  de la notation). La sous-catégorie pleine de  $\mathcal{B}(\mathcal{G})$  constituée des revêtements tempérés pro- $\mathbb{L}$  est notée  $\mathcal{B}^{\text{temp}}(\mathcal{G})^{\mathbb{L}}$ . Le groupe fondamental associé est noté  $\pi_1^{\text{temp}}(\mathcal{G})^{\mathbb{L}}$ .

On a alors une description analogue à celle de  $\pi_1^{\text{temp}}(\mathcal{G})^{\mathbb{L}}$ .

Pour les revêtements tempérés pro- $\mathbb{L}$ , on a par définition que pour tout revêtement tempéré pro- $\mathbb{L}$  connexe  $S$ , il existe un revêtement  $\mathbb{L}$ -fini  $S'$  non vide tel que  $S' \times S \rightarrow S'$  soit un revêtement topologique (on peut de plus supposer  $S'$  connexe et même galoisien car tout objet est dominé par un objet galoisien dans la catégorie classifiante  $\mathcal{B}(\mathcal{G})^{\mathbb{L}}$  par finitude, puisque c'est une catégorie galoisienne).

Soient  $F$  un foncteur fibre de  $\mathcal{B}(\mathcal{G})$ ,  $s \in F(S)$  et  $s' \in F(S')$ . Soit  $(S'^{\infty}, s'^{\infty})$  le revêtement topologique universel de  $(S', s')$ . Alors comme  $(S' \times S, (s', s)) \rightarrow (S', s')$  est un revêtement topologique, le revêtement universel de  $S'$  se factorise en  $(S'^{\infty}, s'^{\infty}) \rightarrow (S' \times S, (s', s)) \rightarrow (S', s')$ , d'où un morphisme  $(S'^{\infty}, s'^{\infty}) \rightarrow (S, s)$  dans  $\mathcal{B}(\mathcal{G})^{\mathbb{L}}$ . Or le revêtement topologique universel d'un revêtement galoisien

est galoisien. En effet, soient  $s'_1, s'_2 \in F(S'^\infty)$ , soient  $s'_1, s'_2$  leurs images dans  $F(S')$ . Il existe un automorphisme  $\phi$  de  $S'$  qui envoie  $s'_1$  en  $s'_2$ .  $C_\phi$  est un automorphisme de  $C_{S'}$ , qui envoie la strate correspondant à  $s'_1$  sur la strate correspondant à  $s'_2$ . La fonctorialité du revêtement topologique universel fournit des automorphismes de  $S'^\infty$  compatibles avec  $C_\phi$ . Le caractère galoisien du revêtement universel nous dit qu'il en existe un qui envoie  $s'_1$  en  $s'_2$ . Ainsi  $S'^\infty$  est bien galoisien. Donc tout revêtement tempéré pro- $\mathbb{L}$  est dominé par un revêtement galoisien :  $\pi_1^{\text{temp}}(\mathcal{G})^{\mathbb{L}}$  est pro-discret.

De plus, si  $\{(S_i, s_i)\}$  est une famille cofinale de revêtements  $\mathbb{L}$ -finis galoisiens, et en notant  $\{(S_i^\infty, s_i^\infty)\}$  la famille de leurs revêtements universels topologiques, on en déduit un isomorphisme :

$$\pi_1^{\text{temp}}(\mathcal{G}, F) = \varprojlim \text{Gal}(S_i^\infty).$$

Dans le cas où le complexe  $l$ -polyclassifiant  $C$  est en fait intérieurement libre (ce sera le cas pour le complexe associé à une fibration strictement polystable), le foncteur  $\text{Cov}^{\text{top}}(|C|) \rightarrow \mathcal{B}^{\text{top}}(\mathbf{A}^l/C)$  admet un quasi-inverse.

En effet, soit  $S$  un revêtement topologique de  $\mathbf{A}^l/C$ , soit  $S_0$  le  $l$ -ensemble polysimplicial  $S_0$  dont la composante en  $x$  est  $\coprod_{x \xrightarrow{\alpha_x} C} S_x$ . On a un morphisme  $S_0 \rightarrow C$  et  $|S_0| \rightarrow |C|$  est un revêtement topologique. En effet, l'image réciproque d'une cellule  $\dot{\Sigma}^n$  (les cellules sont de cette forme car  $C$  est intérieurement libre) de  $|S_0|$  correspondant à un polysimplexe non dégénéré  $x$  est  $\coprod_{S_x} \dot{\Sigma}^n$  grâce à [7, lem 3.4]. La restriction de  $|S_0| \rightarrow |C|$  à l'étoile d'une cellule ouverte est alors un revêtement trivial.

Ainsi  $\mathcal{B}^{\text{top}}(\mathcal{G}) = \mathcal{B}^{\text{top}}(\mathcal{G})$  et  $\pi_1^{\text{top}}(\mathcal{G}) = \pi_1^{\text{top}}(\mathcal{G})$ .

Comme le complexe  $l$ -polysimplicial d'un revêtement d'un complexe  $l$ -polysimplicial classifiant intérieurement libre est encore intérieurement libre, on a aussi :

$$\mathcal{B}^{\text{temp}}(\mathcal{G})^{\mathbb{L}} = \mathcal{B}^{\text{temp}}(\mathcal{G})^{\mathbb{L}}$$

et

$$\pi_1^{\text{temp}}(\mathcal{G})^{\mathbb{L}} = \pi_1^{\text{temp}}(\mathcal{G})^{\mathbb{L}}.$$

## 4.5 Changement de catégorie de base

### 4.5.1 Cas d'invariance par changement de base

Soit  $F : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$  un foncteur de petites catégories, soit  $\mathcal{D}_2$  une catégorie fibrée sur  $\mathcal{C}_2$  et soit  $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2 \times_{\mathcal{C}_2} \mathcal{C}_1$ .

On a un foncteur  $F^* : \text{Cart}_{\mathcal{C}_2}(\mathcal{C}_2, \mathcal{D}_2) \rightarrow \text{Cart}_{\mathcal{C}_1}(\mathcal{C}_1, \mathcal{D}_1)$ .

Soit  $x$  un objet de  $\mathcal{C}_2$  et soit  $x \downarrow F$  la catégorie telle que  $\text{Ob}(x \downarrow F) = \{(f, y), y \in \text{Ob}(\mathcal{C}_1), f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_2}(x, F(y))\}$  et  $\text{Hom}_{x \downarrow F}((f_1, y_1), (f_2, y_2)) = \{\psi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_2}(y_1, y_2) | f_2 = F(\psi)f_1\}$ .

Rappelons que pour  $\mathcal{C}$  une petite catégorie, on note  $\mathcal{C}^\pm$  le groupoïde obtenu par localisation de la classe de tous les morphismes de  $\mathcal{C}$ . On dira qu'un groupoïde est trivial s'il est connexe non vide et tout automorphisme est une identité.

**Proposition 4.5.1.** *(i) Supposons que pour tout  $x \in \text{Ob}(\mathcal{C}_2)$ ,  $x \downarrow F$  ne soit pas la catégorie vide. Alors  $F^*$  est fidèle.*

- (ii) Si pour tout  $x$ ,  $x \downarrow F$  est connexe non vide (c'est-à-dire  $F$  est final), alors  $F^*$  est pleinement fidèle.
- (iii) Si pour tout  $x$ ,  $(x \downarrow F)^\pm$  est un groupoïde trivial (c'est-à-dire  $F$  est 1-final), alors  $F^*$  est une équivalence de catégorie.

*Démonstration.* (i) Supposons  $\forall x \in \text{Ob}(\mathcal{C}_2), x \downarrow F \neq \emptyset$ .

Soient  $\phi_1, \phi_2 : h_1 \rightrightarrows h_2$  des morphismes de  $\text{Cart}(\mathcal{C}_1, \mathcal{D}_1)$  tels que  $F^*(\phi_1) = F^*(\phi_2)$ . Montrons que  $\phi_1 = \phi_2$ .

Soit  $x \in \text{Ob}(\mathcal{C}_2)$ .

Comme  $x \downarrow F \neq \emptyset$ , on peut choisir  $y \in \text{Ob}(\mathcal{C}_1)$  et  $f : x \rightarrow F(y)$ .

Comme  $F^*(\phi_1) = F^*(\phi_2)$ ,  $\phi_1(F(y)) = \phi_2(F(y))$ .

Or, pour  $i = 1$  ou  $2$ , on a les diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{array}{ccc} h_1(x) & \xrightarrow{\phi_i(x)} & h_2(x) \\ \downarrow h_1(f) & & \downarrow h_2(f) \\ h_1(F(y)) & \xrightarrow{\phi_i(F(y))} & h_2(F(y)) \end{array}$$

Donc  $h_2(f)\phi_1(x) = h_2(f)\phi_2(x)$ .

Comme  $h_2(f)$  est un morphisme cartésien,  $\phi_1(x) = \phi_2(x)$ , d'où la fidélité.

- (ii) Plaçons-nous maintenant dans le cas où  $x \downarrow F$  est connexe et non vide.

Soient  $h_1, h_2 \in \text{Ob}(\text{Cart}(\mathcal{C}_2, \mathcal{D}_2))$ , et  $\bar{\phi} : F^*(h_1) \rightarrow F^*(h_2)$ .

Soit  $x \in \text{Ob}(\mathcal{C}_2)$ . Soit  $(f, y) \in \text{Ob}(x \downarrow F)$ .

Comme  $h_2(f)$  est un morphisme cartésien, il existe un unique morphisme  $\phi_{(f,y)}(x) : h_1(x) \rightarrow h_2(x)$  tel que :

$$h_2(f)\phi_{(f,y)}(x) = \bar{\phi}(y)h_1(f).$$

Montrons que  $\phi_{(f,y)}$  ne dépend pas de  $(f, y)$ .

Si maintenant, on a  $f_1 = F(g)f_2$  avec  $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(y_2, y_1)$ , considérons

$$\begin{array}{ccc} h_1(x) & \xrightarrow{\phi_{(f_2, y_2)}} & h_2(x) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F^*(h_1)(y_2) & \xrightarrow{\bar{\phi}(y_2)} & F^*(h_2)(y_2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F^*(h_1)(y_1) & \xrightarrow{\bar{\phi}(y_1)} & F^*(h_2)(y_1), \end{array}$$

où le rectangle du haut commute par définition de  $\phi_{(f_2, y_2)}(x)$  et où le rectangle du bas commute car  $\bar{\phi}$  est un morphisme de foncteurs.

Par unicité de  $\phi_{(f_1, y_1)}(x)$  faisant commuter le grand rectangle, on en déduit que  $\phi_{(f_2, y_2)}(x) = \phi_{(f_1, y_1)}(x)$ , donc  $\phi_{(f,y)}(x)$  ne dépend que de la composante connexe de  $(f, y)$ .

Comme, par hypothèse, il n'y a qu'une seule composante connexe,  $\phi_{(f,y)}(x)$  ne dépend pas de  $(f, y)$ . On le note  $\phi(x)$ .

Soit  $g : x' \rightarrow x$  un morphisme de  $\mathcal{C}_2$ . Soit  $(f, y) \in \text{Ob}(x \downarrow F)$ . Alors  $(fg, y) \in$

$\text{Ob}(x' \downarrow F)$ . On a  $h_2(f)\phi(x)h_1(g) = \bar{\phi}(y)h_1(f)h_1(g) = \bar{\phi}(y)h_1(fg) = h_2(fg)\phi(x') = h_2(f)h_2(g)\phi(x')$ . Comme  $h_2(f)$  est cartésien  $\phi(x)h_1(g) = h_2(g)\phi(x')$  (cf. [17, prop. 6.11]). Donc  $\phi$  définit bien un morphisme  $h_1 \rightarrow h_2$  d'image  $\bar{\phi}$ . D'où la plénitude.

(iii) Choisissons un clivage de  $\mathcal{C}_2$  et de  $\mathcal{C}_1$ . Soit  $\bar{S} \in \text{Ob}(\text{Cart}(\mathcal{C}_1, \mathcal{D}_1))$ . Soit  $x \in \text{Ob}(\mathcal{C}_2)$ .

Si  $(f, y) \in \text{Ob}(x \downarrow F)$ , on peut définir  $S_{x, (f, y)} = f^*(\bar{S}_y)$  ( $\bar{S}_y$  est un objet de  $\mathcal{D}_{2, y} = \mathcal{D}_{1, F(y)}$ , et donc  $f^*\bar{S}_y$  est bien un objet de  $\mathcal{D}_{1, x}$ ).

Soit  $g \in \text{Hom}_{x \downarrow F}((f_2, y_2), (f_1, y_1))$  (c'est-à-dire  $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(y_2, y_1)$ ) tel que  $f_1 = F(g)f_2$ . Alors  $g$  définit un isomorphisme  $g_* : S_{x, (f_2, y_2)} \rightarrow S_{x, (f_1, y_1)}$  par  $f_2^*(\bar{S}_{y_2}) \simeq f_2^*(g^*(\bar{S}_{y_1})) \simeq (F(g)f_2)^*(\bar{S}_{y_1}) = S_{x, (f_1, y_1)}$ . On obtient ainsi un foncteur  $x \downarrow F \rightarrow \mathcal{D}_{1, x}$  dont l'image de tout morphisme est un isomorphisme. Ce foncteur se prolonge donc en un foncteur  $\alpha_x : (x \downarrow F)^\pm \rightarrow \mathcal{D}_{1, x}$ . Comme nous supposons ici que  $(x \downarrow F)^\pm$  est un groupoïde trivial, cela montre que l'on a des isomorphismes canoniques  $S_{x, (f_1, y_1)} \simeq S_{x, (f_2, y_2)}$  pour tous les couples d'objets de  $x \downarrow F$ . Fixons pour tout  $x$  un objet arbitraire  $(f, y)$  de  $x \downarrow F$  et définissons  $S_x = S_{x, (f, y)}$ . On notera  $\theta_{(f', y')}$  l'unique morphisme  $(f', y') \rightarrow (f, y)$  dans  $(x \downarrow F)^\pm$ .

Soient  $\psi : x \rightarrow x'$  et  $g \in \text{Hom}_{x' \downarrow F}((f'_2, y'_2), (f'_1, y'_1))$ .  $g$  définit également un objet  $\psi^*g$  de  $\text{Hom}_{x \downarrow F}((f'_2\psi, y'_2), (f'_1\psi, y'_1))$ . On a  $\psi^* \circ g_* = (\psi^*g)_*$  (aux identifications  $(f'_i\psi)^* \simeq \psi^*f_i^*$  près), et donc, par localisation, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} (x' \downarrow F)^\pm & \xrightarrow{\alpha_{x'}} & \mathcal{D}_{1, x'} \\ \downarrow \psi^* & & \downarrow \psi^* \\ (x \downarrow F)^\pm & \xrightarrow{\alpha_x} & \mathcal{D}_{1, x} \end{array}$$

est 2-commutatif (où le 2-morphisme est  $\alpha_x \psi^*(f', y') = (f'\psi)^* S_{y'} \simeq \psi^* f'^* S_{y'} = \psi^* \alpha_{x'}(f', y')$ ).

Si  $\psi : x \rightarrow x'$  est un morphisme dans  $\mathcal{C}_2$ ,  $(f'\psi, y')$  est un objet de  $x \downarrow F$ , d'où l'isomorphisme canonique  $\alpha_\psi : \psi^* S_{x'} = \psi^* f'^* \bar{S}_y = S_{x, (f'\psi, y')} \simeq S_x$ . Si,  $\psi : x \rightarrow x'$  et  $\psi' : x' \rightarrow x''$  sont deux morphismes dans  $\mathcal{C}_2$ , on a :

$$\begin{aligned} \psi^*(\alpha_{\psi'})\alpha_\psi &= \psi^*(\alpha_{x'}(\theta_{(f''\psi', y'')}))\alpha_x(\theta_{(f'\psi, y')}) \\ &\simeq \alpha_x(\psi^*(\theta_{(f''\psi', y'')}))\theta_{(f'\psi, y')} = \alpha_x(\theta_{(f''\psi'\psi, y'')}) = \alpha_{\psi'\psi} \end{aligned}$$

où l'isomorphisme est donné par l'identification  $(f'\psi) \simeq \psi^* f'^*$  (la dernière égalité vient du fait qu'on a forcément  $\psi^*(\theta_{(f''\psi', y'')})\theta_{(f'\psi, y')} = \theta_{(f''\psi'\psi, y'')}$  par unicité des morphismes dans  $(x \downarrow F)^\pm$ ).

On obtient ainsi un objet  $S \in \text{Ob}(\text{Cart}(\mathcal{C}_2, \mathcal{D}_2))$  d'image par  $F^*$  isomorphe à  $\bar{S}$ . □

**Exemples.** – Si  $\mathcal{C}$  a un objet final  $e$ , considérant le foncteur  $F : 1 \rightarrow \mathcal{C}$  de la catégorie triviale 1 dans  $\mathcal{C}$  d'image  $e$ . Soit  $x$  un élément de  $\mathcal{C}$ , alors  $x \downarrow F$  est la catégorie discrète  $\text{Hom}(x, e)$ , qui, comme  $e$  est un objet final est bien connexe (donc triviale). On peut donc appliquer 4.5.1.(iii) à  $F$ .  
– Si  $\mathcal{C}$  est une catégorie, on a un foncteur  $F : (\Delta/N(\mathcal{C}))^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}$  (où  $N(\mathcal{C})$  est le nerf de  $\mathcal{C}$ , et  $\Delta$  est la catégorie simpliciale) qui à  $[x_1 \xrightarrow{f_1} x_2 \cdots x_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}^{-1}} x_n]$

$x_n]$  associe  $x_1$ . Soit  $x \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ , alors  $x \downarrow F = (\Delta/N(x \setminus \mathcal{C}))^{\text{op}}$ , avec  $x \setminus \mathcal{C}$  admettant un objet initial. On vérifie alors que si  $\mathcal{C}'$  admet un objet initial (ou un objet final),  $(\Delta/N(\mathcal{C}'))^\pm$  est un groupoïde trivial. On peut donc appliquer 4.5.1.(iii) à  $F$ .

#### 4.5.2 Descente de complexes classifiants

Etant donné un foncteur cofibrant  $\mathcal{C}_2 \rightarrow \mathcal{C}_1$  (cf. [17, § VI.10] pour la définition d'une catégorie cofibrée), on cherche ici à construire, pour une catégorie fibrée  $\mathcal{D}_1/\mathcal{C}_1$ , une catégorie fibrée sur  $\mathcal{C}_2$  dont les fibres correspondent à la catégorie des sections cartésiennes de la restriction de  $\mathcal{D}_1$  à la fibre de  $\mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$ . On trouvera des résultats plus détaillés dans [15, section 4] (notamment [15, th. 4.7]).

Soit  $G : \mathcal{C}_2 \rightarrow \mathcal{C}_1$  un foncteur cofibrant (qu'on supposera muni d'un coclivage normalisé) et soit  $\mathcal{D}_2$  une catégorie fibrée sur  $\mathcal{C}_2$  (qu'on supposera munie d'un clivage normalisé).

Soit  $x \in \text{Ob}(\mathcal{C}_1)$ , on a alors par restriction une catégorie  $\mathcal{D}_{2,x}$  fibrée sur  $\mathcal{C}_{2,x}$  (où  $\mathcal{C}_{2,x}$  est la fibre de  $x$  pour  $G$ ). Appelons  $\mathcal{D}_{1,x}$  la catégorie des sections cartésiennes  $\varprojlim \mathcal{D}_{2,x}/\mathcal{C}_{2,x}$ .

Si  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(x, x')$ , on a un foncteur  $f_* : \mathcal{C}_{2,x} \rightarrow \mathcal{C}_{2,x'}$ .

Soit  $y$  un objet de  $\mathcal{C}_{2,x}$  (notons  $\alpha_y$  le morphisme  $y \rightarrow f_*(y)$ ).

On a  $(\mathcal{D}_{2,x})_y = \mathcal{D}_{2,y}$  et  $(\mathcal{D}_{2,x'} \times_{\mathcal{C}_{2,x'}} \mathcal{C}_{2,x})_y = \mathcal{D}_{2,f_*(y)}$ .

$\alpha^*$  définit donc un foncteur  $F_y : (\mathcal{D}_{2,x})_y \rightarrow (\mathcal{D}_{2,x'} \times_{\mathcal{C}_{2,x'}} \mathcal{C}_{2,x})_y$ .

Si  $\psi : y \rightarrow z$  est un morphisme de  $\mathcal{C}_{2,x}$ , on a  $\alpha_z \psi = f_*(\psi) \alpha_y$ , donc l'isomorphisme  $\psi^* \alpha_z^* \simeq (\alpha_z \psi)^* = (f_*(\psi) \alpha_y)^* \simeq \alpha_y^* (f_*(\psi))^*$  induit un isomorphisme  $F_y \psi^*_{\mathcal{D}_{2,x'} \times_{\mathcal{C}_{2,x'}} \mathcal{C}_{2,x}} \rightarrow \psi^*_{\mathcal{D}_{2,x}} F_z$  qui vérifie la condition de compatibilité à la composition.

Ceci définit donc un foncteur cartésien  $\mathcal{D}_{2,x} \rightarrow \mathcal{D}_{2,x'} \times_{\mathcal{C}_{2,x'}} \mathcal{C}_{2,x}$  sur  $\mathcal{C}_{2,x}$ , d'où un foncteur

$$f^* : \varprojlim \mathcal{D}_{2,x'}/\mathcal{C}_{2,x'} \rightarrow \varprojlim \mathcal{D}_{2,x'} \times_{\mathcal{C}_{2,x'}} \mathcal{C}_{2,x}/\mathcal{C}_{2,x} \rightarrow \varprojlim \mathcal{D}_{2,x}/\mathcal{C}_{2,x}.$$

Les données  $\mathcal{D}_{1,x} := \varprojlim \mathcal{D}_{2,x}/\mathcal{C}_{2,x}$  permettent ainsi de construire sur  $\mathcal{C}_1$  une catégorie fibrée  $\mathcal{D}_1$ .

On peut aussi définir  $\mathcal{D}_1$  beaucoup plus canoniquement :

- $\text{Ob}(\mathcal{D}_1) = \{(x, s) | x \in \text{Ob}(\mathcal{C}_1), s \in \varprojlim \mathcal{D}_{2,x}/\mathcal{C}_{2,x}\}$
- $\text{Hom}_{\mathcal{D}_1}((x, s), (x', s'))$  est l'ensemble des  $(f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}_1}(x, x'), (\phi_{\alpha: y \rightarrow y'} \in \text{Hom}_{\mathcal{D}_2}(s(y), s'(y'))))$ , où  $\alpha : y \rightarrow y'$  décrit l'ensemble des morphismes cocartésiens de  $\mathcal{C}_2$  (en tant que  $\mathcal{C}_1$ -catégorie) qui s'envoient dans  $\mathcal{C}_1$  sur  $f$  et qui vérifient :
  - $\phi_\alpha$  s'envoie sur  $\alpha$  par le foncteur  $\mathcal{D}_2 \rightarrow \mathcal{C}_2$ ,
  - pour tout  $\psi : y \rightarrow z$  au-dessus de  $\text{id}_x$ , pour tous  $\alpha : y \rightarrow y', \beta : z \rightarrow z'$  cocartésiens au-dessus de  $f$ ,  $\phi_\beta s(\psi) = s'(\psi') \phi_\alpha$  (où  $\psi' : y' \rightarrow z'$  est l'unique morphisme de  $\mathcal{C}_2$  au-dessus de  $\text{id}_{x'}$  tel que  $\psi' \alpha = \beta \psi$  (l'unicité provient de la cocartésianité de  $\alpha$ )).
- Si  $(f_1, \phi_{1,\alpha}) : (x, s) \rightarrow (x', s')$  et si  $(f_2, \phi_{2,\beta}) : (x', s') \rightarrow (x'', s'')$ , la composée est définie par  $(f_2 f_1, \phi_\gamma)$ , où, si  $\gamma$  est un morphisme cocartésien de

$\mathcal{C}_2$  au-dessus de  $f_2 f_1$ , choisissons  $\alpha$  cocartésien au-dessus de  $f_1$  de même source que  $\gamma$  et soit  $\beta$  l'unique morphisme au-dessus de  $f_2$  tel que  $\beta\alpha = \gamma$  ( $\beta$  est bien cocartésien aussi d'après [17, cor. VI.6.13]), alors  $\phi_\gamma = \phi_{2,\beta}\phi_{1,\alpha}$ . Cela ne dépend pas du choix de  $\alpha$  car si  $\alpha'$  en est un autre (de  $\beta'$  correspondant), alors il existe  $u$ , nécessairement cocartésien, au-dessus de  $\text{id}_{x'}$  tel que  $\alpha' = u\alpha$ , donc  $(\beta'u)\alpha = \beta\alpha$ , donc  $\beta'u = \beta$  par unicité de  $\beta$ , et donc  $\phi_{\gamma'} = \phi_{2,\beta'}\phi_{1,u\alpha} = \phi_{2,\beta'}s'(u)\phi_{1,\alpha} = \phi_{2,\beta'u}\phi_{1,\alpha} = \phi_\gamma$ .

Le foncteur  $F : \mathcal{D}_1 \rightarrow \mathcal{C}_1$  est alors défini par  $F((x, s)) = x$  et  $F((f, (\phi_\alpha))) = f$ . Vérifions que  $\mathcal{D}_1 \rightarrow \mathcal{C}_1$  est bien fibré.

Soit  $f : x \rightarrow x'$  et soit  $(x', s') \in \text{Ob}(\mathcal{D}_1)$ .

Pour tout  $y \in \text{Ob}(\mathcal{C}_2)$  au-dessus de  $x$ , choisissons  $\alpha_y : y \rightarrow y'$  cocartésien au-dessus de  $f$  et choisissons un morphisme cartésien dans  $\mathcal{D}_2$   $\phi_y : \eta \rightarrow s'(y')$  au-dessus de  $\alpha_y$ . Appelons  $s(y) := \eta$ .

Si  $\psi : y \rightarrow z$ , par cartésianité de  $\alpha_y$ , il existe un unique  $\psi'$  au-dessus de  $\text{id}_{x'}$  tel que  $\psi'\alpha_y = \alpha_z\psi$ . Par cartésianité de  $\phi_z$ , il existe un unique  $s(\psi) : s(y) \rightarrow s(z)$  au-dessus de  $\psi$  tel que  $\phi_z s(\psi) = s'(\psi')\phi_y$ .

Cela définit ainsi un objet  $(x, s)$  de  $\mathcal{D}_1$  au-dessus de  $x$ .

Pour tout  $\alpha'' : y \rightarrow y''$  cocartésien dans  $\mathcal{C}_2$ , il existe un unique isomorphisme  $u : y' \rightarrow y''$  au-dessus de  $\text{id}_{x'}$  tel que  $\alpha'' = u\alpha_y$ . Définissons  $\phi_\alpha := s'(u)\phi_y : s(y) \rightarrow s'(y'')$ .

Cela définit un morphisme  $(x, s) \rightarrow (x', s')$  dans  $\mathcal{D}_1$  au-dessus de  $f$ , qui a la propriété que  $\phi_\alpha$  est cartésien (sur  $\mathcal{D}_2$ ) pour tout  $\alpha$ .

Soit  $(f, (\phi_\alpha)) : (x, s) \rightarrow (x', s')$  un tel morphisme dans  $\mathcal{D}_1$ , montrons qu'il est cartésien (la composée  $(f'', (\phi''_\gamma))$  de deux tels morphismes  $(f, (\phi_\alpha))$  et  $(f', (\phi'_\beta))$  vérifie encore la même propriété parce que  $\phi''_{\alpha\beta} = \phi_\alpha\phi'_\beta$ , donc sera aussi cartésienne).

Soit donc  $(f, (\phi_{0\alpha})) : (x, s_0) \rightarrow (x', s')$  un autre morphisme de même but que  $(f, (\phi_\alpha))$  et au-dessus du même morphisme  $f$ .

Soit  $u : y_0 \rightarrow y$  un morphisme cocartésien de  $\mathcal{C}_2$  au-dessus de  $\text{id}_x$  (c'est donc un isomorphisme). Choisissons  $\alpha : y \rightarrow y'$  un morphisme cocartésien d'origine  $y$  au-dessus de  $f$  et soit  $\alpha' = \alpha u$ . Alors, comme  $\phi_\alpha$  est cartésien, il existe un unique  $\phi_{1u} : s_0(y_0) \rightarrow s(y)$  au-dessus de  $u$  tel que  $\phi_\alpha\phi_{1u} = \phi_{0\alpha'}$  ( $\phi_{1u}$  doit nécessairement vérifier cette propriété pour que  $(f, (\phi_\alpha))(\text{id}_x, (\phi_{1u})) = (f, (\phi_{0\alpha'}))$ ); l'unicité d'un tel  $\phi_{1u}$  montre déjà l'unicité recherchée.

Vérifions que  $\phi_{1u}$  ne dépend pas du choix de  $\alpha$  mais uniquement de  $u$ . Soit donc  $\beta : y \rightarrow y''$  un autre morphisme cocartésien au-dessus de  $f$  et appelons  $\beta' = \beta u$ . Alors, comme  $\alpha$  est cartésien, il existe un unique morphisme  $w : y' \rightarrow y''$  au-dessus de  $\text{id}_{x'}$  tel que  $\beta = w\alpha$ . On a aussi  $\beta' = w\alpha'$ . Donc  $\phi_\beta = s'(w)\phi_\alpha$  et  $\phi_{\beta'} = s'(w)\phi_{\alpha'}$ , donc on a également  $\phi_\beta\phi_{1u} = \phi_{0\beta'}$ , donc  $\phi_{1u}$  ne dépend pas du choix de  $\alpha$ .

Si  $\psi_0 : y_0 \rightarrow z_0$  est un morphisme au-dessus de  $\text{id}_x$ ,  $u : y_0 \rightarrow y$ ,  $v : z_0 \rightarrow z$  des isomorphismes au-dessus de  $\text{id}_x$ , posons  $\psi = v\psi_0 u^{-1} : y \rightarrow z$ . On veut montrer que  $s(\psi)\phi_{1u} = \phi_{1v}s_0(\psi_0)$ . Soient donc  $\alpha : y \rightarrow y'$  et  $\beta : z \rightarrow z'$  des morphismes cocartésiens au-dessus de  $f$ , soit  $\psi' : y' \rightarrow z'$  l'unique morphisme au-dessus de  $\text{id}_{x'}$  tel que  $\psi'\alpha = \beta\psi$  et soient  $\alpha' = \alpha u$  et  $\beta' = \beta v$ . Alors  $\phi_{0\beta'}s_0(\psi_0) = s'(\psi')\phi_{0\alpha'}$ , et donc  $\phi_\beta\phi_{1v}s_0(\psi_0) = s'(\psi')\phi_\alpha\phi_{1u}$ . Or  $\phi_\beta s(\psi) = s'(\psi')\phi_\alpha$ , donc  $\phi_\beta(\phi_{1v}s_0(\psi_0)) = \phi_\beta s(\psi)\phi_{1u}$ . Comme  $\phi_\beta$  est cartésien, on a donc aussi  $\phi_{1v}s_0(\psi_0) = s(\psi)\phi_{1u}$ .



Donc  $(\text{id}_x, (\phi_{1u}))$  définit bien un morphisme  $(x, s_0) \rightarrow (x, s)$  qui vérifie

$$(f, (\phi_\alpha))(\text{id}_x, (\phi_{1u})) = (f, (\phi_{0\alpha'})),$$

donc  $(f, (\phi_\alpha))$  est bien cartésien, donc  $\mathcal{D}_1 \rightarrow \mathcal{C}_1$  est bien fibrée.

De plus la fibre  $\mathcal{D}_{1,x}$  est bien naturellement équivalente à  $\varprojlim D_{2,x}/C_{2,x}$  (car si  $(\text{id}_x, \phi) : (x, s) \rightarrow (x, s')$  est un morphisme, il suffit de se donner les  $\phi_{\text{id}_y}$  pour tout  $y$  au-dessus de  $x$ , car on peut reconstruire, pour  $u : y \rightarrow y'$ ,  $\phi_u = \phi_{\text{id}_y} s(u) (= s'(u) \phi_{\text{id}_y})$ ).

Quand on veut garder en tête l'importance du foncteur  $F : \mathcal{C}_2 \rightarrow \mathcal{C}_1$ , on notera aussi  $F_*(\mathcal{D}_2/\mathcal{C}_2)$  la catégorie fibrée  $\mathcal{D}_1/\mathcal{C}_1$ .

**Proposition 4.5.2** ([15, th. 4.7]). (i) On a une équivalence de catégories canonique

$$\varprojlim \mathcal{D}_2/\mathcal{C}_2 \rightarrow \varprojlim \mathcal{D}_1/\mathcal{C}_1$$

(ii) Plus généralement, si on a  $\mathcal{C}_2 \xrightarrow{G} \mathcal{C}_1 \xrightarrow{F} \mathcal{C}_0$  des foncteurs fibrants et si  $\mathcal{D}_2$  est une catégorie fibrée sur  $\mathcal{C}_2$ , on a une équivalence naturelle de catégories fibrées  $c_{F,G} : (FG)_*(\mathcal{D}_2/\mathcal{C}_2) \rightarrow F_*G_*(\mathcal{D}_2/\mathcal{C}_2)$ .

*Démonstration.* (i) A une section cartésienne  $s$  de  $\mathcal{D}_2/\mathcal{C}_2$ , on associe à tout  $x$  sa restriction  $(x, s_x)$  à  $\mathcal{C}_{2,x}$  (c'est un objet de  $\mathcal{C}_1$  au-dessus de  $x$ ), et à tout  $f : x \rightarrow x'$ , on associe  $(f, (\phi_{\alpha:y \rightarrow y'} = s(\alpha) : s_x(y) \rightarrow s_{x'}(y')))$ . Ceci définit une section  $F(s)$  de  $\mathcal{D}_1/\mathcal{C}_1$ .

Si  $\psi : s \rightarrow s'$  est un morphisme dans la catégorie  $\varprojlim \mathcal{D}_2/\mathcal{C}_2$ , on lui associe un morphisme  $F(\psi) : F(s) \rightarrow F(s')$  donné pour tout  $x$  par  $F(\psi)_x = (\text{id}_x, \phi_{u:y \rightarrow y'} = s'(u) \psi_y (= \psi_y s(u))$  (par l'identification précédente de  $\mathcal{D}_{1,x}$  avec  $\varprojlim \mathcal{D}_{2,x}/\mathcal{C}_{2,x}$ , on peut voir  $F(\psi)_x$  dans  $\varprojlim \mathcal{D}_{2,x}/\mathcal{C}_{2,x}$  comme la restriction de  $\psi$  à  $\mathcal{D}_{2,x}/\mathcal{C}_{2,x}$ ).

On obtient ainsi un foncteur  $F$  de  $\varprojlim \mathcal{D}_2/\mathcal{C}_2 \rightarrow \varprojlim \mathcal{D}_1/\mathcal{C}_1$ .

La donnée d'une section cartésienne équivaut à la donnée, pour tout  $x$ , d'une section cartésienne  $s_x$  de  $\mathcal{D}_{2,x}$ , et pour tout  $f$  et tout  $\alpha$  cocartésien au-dessus de  $f$  de  $\phi_\alpha^f$  qui vérifient  $\phi_\alpha^f \phi_\beta^{f'} = \phi_{\alpha\beta}^{ff'}$  pour tous  $\alpha$  et  $\beta$  composables, et si  $\beta\psi = \psi'\alpha$  au dessus de  $f \text{id}_x = \text{id}_{x'} f$  avec  $\alpha$  et  $\beta$  cocartésiens, alors  $\phi_\beta^f s_x(\psi) = s_{x'}(\psi') \phi_\alpha^f$ .

On définit alors pour tout objet  $y$  au-dessus de  $x : s(y) := s_x(y)$ . Si  $\phi : y \rightarrow y'$  est au-dessus de  $f : x \rightarrow x'$ , alors, pour tout  $\alpha$  cocartésien au-dessus de  $f$  de source  $y$ , on peut factoriser de façon unique  $\phi = \psi\alpha$ , et on pose  $s(\phi) = s_{x'}(\psi) \phi_\alpha^f$  (si  $\alpha'$  est un autre morphisme cocartésien au-dessus de  $f$ ,  $\alpha' = u\alpha$ , la décomposition de  $\phi$  est alors  $\phi = (\psi u) \alpha'$  et  $s_{x'}(\psi u) \phi_{\alpha'}^f = s_{x'}(\psi) s_{x'}(u) \phi_{\alpha'}^f = s_{x'}(\psi) \phi_\alpha^f$  donc la construction de  $s(f)$  ne dépend pas du choix de  $\alpha$ ).

Si  $\phi : y \rightarrow y'$  et  $\phi' : y' \rightarrow y''$ , choisissons  $\psi, \alpha, \psi'$  et  $\alpha'$  comme ci-dessus. Alors  $s(\phi') s(\phi) = s_{x''}(\psi') \phi_{\alpha'}^{f'} s_{x'}(\psi) \phi_\alpha^f$ . Soit  $\beta$  cocartésien de source l'image de  $\alpha$  au-dessus de  $f'$ , alors il existe un unique  $\psi_0$  tel que  $\psi_0 \beta = \alpha' \psi$ , donc  $s_{x''}(\psi_0) \phi_\beta^{f'} = \phi_{\alpha'}^{f'} s_{x'}(\psi)$ . Donc  $s(\phi') s(\phi) = s_{x''}(\psi') s_{x''}(\psi_0) \phi_\beta^{f'} \phi_\alpha^f = s_{x''}(\psi' \psi_0) \phi_{\beta\alpha}^{f'f} = s(\phi \phi')$ .

Un morphisme entre sections cartésiennes de  $\mathcal{D}_{2,x} ((s_x)_x, (\phi_\alpha)_\alpha) \rightarrow ((s'_x)_x, (\phi'_\alpha)_\alpha)$  est la donnée pour tout  $x$  d'un morphisme  $(\text{id}_x, \psi_u) : s_x \rightarrow s'_x$  dans  $\mathcal{D}_{1,x}$  tel que  $\phi'_\alpha \psi_u = \psi_u \phi_\alpha$ .

On définit alors pour tout  $y$   $\psi_y : s(y) \rightarrow s'(y)$  par  $\psi_{\text{id}_y}$ . Pour que cela définisse bien un morphisme  $s \rightarrow s'$ , il suffit de vérifier que pour tout  $\phi : y \rightarrow y'$  au-dessus de  $f : x \rightarrow x'$ ,  $s'(\phi)\psi_y = \psi_{y'}s(\phi)$ , c'est-à-dire, en considérant une décomposition  $\phi = \psi\alpha$ , que  $s'_{x'}(\psi)\phi'_\alpha\psi_{\text{id}_y} = \psi_{\text{id}_{y'}}s_{x'}(\psi)\phi_\alpha$ .

Or  $s'_{x'}(\psi)\phi'_\alpha\psi_{\text{id}_y} = s'_{x'}(\psi)\psi_{\text{id}_y}\phi_\alpha$  car  $(\text{id}_x, \psi_u)_x$  est bien un morphisme de sections  $((s_x)_x, (\phi_\alpha)_\alpha) \rightarrow ((s'_x)_x, (\phi'_\alpha)_\alpha)$ , et  $s'_{x'}(\psi)\psi_{\text{id}_y}\phi_\alpha = \psi_{\text{id}_{y'}}s_{x'}(\psi)\phi_\alpha$  car  $(\text{id}_x, \psi_u)$  est bien un morphisme  $s_x \rightarrow s'_x$ .

On obtient ainsi un foncteur  $\varprojlim \mathcal{D}_1/\mathcal{C}_1 \rightarrow \varprojlim \mathcal{D}_2/\mathcal{C}_2$ .

Les deux foncteurs ainsi obtenus sont inverses l'un de l'autre, d'où (i).

(ii) La preuve est similaire à celle de (i) ((i) nous donne déjà les équivalences fibres à fibres).

□

On en déduit que si on a un morphisme cocartésien de catégories cofibrées

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_2 & \rightarrow & \mathcal{C}'_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{C}_1 & \rightarrow & \mathcal{C}'_1 \end{array}$$

et qu'on a un morphisme cartésien de catégories fibrées  $\mathcal{D}_2/\mathcal{C}_2 \rightarrow \mathcal{D}'_2/\mathcal{C}'_2$ , alors on a un morphisme naturel de catégories fibrée  $\mathcal{D}_1/\mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{D}'_1/\mathcal{C}'_1$  (la descente d'une catégorie fibrée le long d'un foncteur  $F$  est 2-fonctorielle en la catégorie fibrée).

$c_{F,G}$  est naturel au sens où si on a  $\mathcal{C}_3 \xrightarrow{H} \mathcal{C}_2 \xrightarrow{G} \mathcal{C}_1 \xrightarrow{F} \mathcal{C}_0$  et  $\mathcal{D}_3/\mathcal{C}_3$  une catégorie fibrée, on a  $(F \circ c_{G,H}) \cdot c_{F,GH} = (c_{F,G} \circ H) \cdot c_{FG,H}$ .

Si  $\mathcal{D}_2$  est un complexe classifiant sur  $\mathcal{C}_2$  (ou plus généralement multiclassifiant), alors  $\mathcal{D}_1$  hérite aussi d'une structure de complexe multiclassifiant (classifiant si les fibres de  $\mathcal{C}_2 \rightarrow \mathcal{C}_1$  sont connexes). On a alors une équivalence  $\mathcal{B}(\mathcal{C}_2) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{C}_1)$ .

**Exemple.** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie et  $X$  un préfaisceau sur  $\mathcal{C}$ . On a alors un foncteur cofibrant  $(X/\mathcal{C})^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}^{\text{op}}$  (nous l'utiliserons principalement dans les cas où  $\mathcal{C}$  est la catégorie simpliciale, la catégorie simpliciale stricte, la catégorie polysimpliciale, la catégorie bisimpliciale). Si donc  $\mathcal{D}_2$  est un complexe classifiant sur  $(X/\mathcal{C})^{\text{op}}$ , on peut se ramener à l'étude du complexe multiclassifiant  $\mathcal{D}_1$  sur  $\mathcal{C}$  obtenu en descendant  $\mathcal{D}_2$  (les fibres sont  $(\mathcal{D}_1)_x = \prod_{y \in X(x)} (\mathcal{D}_2)_y$ ).

Supposons que l'on ait un morphisme cocartésien de catégories cofibrées :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_2 & \xrightarrow{F'} & \mathcal{C}'_2 \\ \downarrow G & & \downarrow G' \\ \mathcal{C}_1 & \xrightarrow{F} & \mathcal{C}'_1 \end{array}$$

**Proposition 4.5.3.** *Supposons de plus que  $\mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}'_1$  vérifie la conclusion de 4.5.1.(iii) et que, pour tout objet  $x$  de  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}_{2,x} \rightarrow \mathcal{C}'_{2,F(x)}$  vérifie aussi la conclusion de 4.5.1.(iii), alors  $F' : \mathcal{C}_2 \rightarrow \mathcal{C}'_2$  vérifie aussi la conclusion de 4.5.1.(iii).*

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{D}'_2$  une catégorie fibrée sur  $\mathcal{C}'_2$  et soit  $\mathcal{D}_2 = \mathcal{D}'_2 \times_{\mathcal{C}'_2} \mathcal{C}_2$ . On a, par fonctorialité de la descente, un morphisme de catégories fibrées  $G_*(\mathcal{D}_2)/\mathcal{C}_1 \rightarrow G'_*(\mathcal{D}'_2)/\mathcal{C}'_1$ , d'où un morphisme  $G_*(\mathcal{D}_2) \rightarrow G'_*(\mathcal{D}'_2) \times_{\mathcal{C}'_1} \mathcal{C}_1$  de catégories fibrées sur  $\mathcal{C}_1$ . Mais si  $x$  est un objet de  $\mathcal{C}_1$ , la fibre en  $x$  de ce morphisme est  $\varprojlim_{\leftarrow} \mathcal{D}'_{2,F(x)} \times_{\mathcal{C}'_{2,F(x)}} \mathcal{C}_{2,x}/\mathcal{C}_{2,x} \rightarrow \varprojlim_{\leftarrow} \mathcal{D}'_{2,F(x)}/\mathcal{C}'_{2,F(x)}$ , qui est une équivalence de catégories par hypothèse.

Donc  $G_*(\mathcal{D}_2) \rightarrow G'_*(\mathcal{D}'_2) \times_{\mathcal{C}'_1} \mathcal{C}_1$  est une équivalence de catégories, donc en appliquant l'hypothèse faite à  $\mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}'_1$ ,

$$\varprojlim_{\leftarrow} G_*(\mathcal{D}_2)/\mathcal{C}_1 \rightarrow \varprojlim_{\leftarrow} G'_*(\mathcal{D}'_2)/\mathcal{C}'_1$$

est une équivalence de catégories.

Or on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \varprojlim_{\leftarrow} \mathcal{D}_2/\mathcal{C}_2 & \longrightarrow & \varprojlim_{\leftarrow} \mathcal{D}'_2/\mathcal{C}'_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \varprojlim_{\leftarrow} G_*(\mathcal{D}_2)/\mathcal{C}_1 & \longrightarrow & \varprojlim_{\leftarrow} G'_*(\mathcal{D}'_2)/\mathcal{C}'_1 \end{array}$$

dont les flèches verticales sont des équivalences d'après la proposition 4.5.2, donc le foncteur du haut est aussi une équivalence.  $\square$

## Chapitre 5

# Groupe fondamental tempéré d'un log schéma pluristable

Dans ce chapitre, nous définissons et étudions le groupe fondamental tempéré (et des variantes  $\mathbb{L}$ ) d'une fibration polystable  $X \rightarrow \cdots \rightarrow k$  munie d'une log structure fs compatible, par analogie avec la construction sur les espaces de Berkovich. Les revêtements két de  $X$  joueront le rôle des revêtements finis. Berkovich a déjà associé à une telle fibration polystable un espace polysimplicial (proposition 1.4.3) et sa réalisation géométrique jouera le rôle de structure topologique de  $X$ . Cependant pour définir le groupe fondamental tempéré, il faut une structure topologique sur tous les revêtements finis. Nous serons donc amenés dans un premier temps à associer à un revêtement két de  $X$  un ensemble polysimplicial (§5.1.2), dont la réalisation géométrique jouera le rôle de structure topologique de  $X$ , ce qui nous permettra de définir le groupe fondamental tempéré de la fibration polystable.

Soit  $K$  un corps complet pour une valuation discrète. Soit  $p$  sa caractéristique résiduelle. Pour une fibration polystable propre  $X \rightarrow \cdots \rightarrow O_K$  dont la fibre générique est lisse, nous comparerons les variantes  $(p')$  du groupe fondamental tempéré de la fibre spéciale de  $X$  muni de sa structure logarithmique et le groupe fondamental tempéré de l'espace analytique associé à la fibre générique de  $X$  (5.2.2). On dispose déjà d'une équivalence entre les deux catégories de revêtements  $(p')$ -finis. Il faudra donc principalement comparer la topologie de la fibre générique à celle de l'ensemble polysimplicial de la fibre spéciale pour tous les revêtements  $(p')$ -finis de  $X$ . Pour ce faire, nous étendrons le théorème 1.4.5 aux revêtements két de  $X$ .

Enfin nous donnerons une description plus combinatoire du groupe fondamental tempéré d'une fibration polystable logarithmique en terme d'un complexe polysimplicial classifiant. L'ensemble polysimplicial sous-jacent est celui de la proposition 1.4.3. Dans le cas d'une fibration strictement polystable, le groupe associé à une composante de cet ensemble polysimplicial est le groupe fondamental logarithmique de la strate correspondante. Dans le cas général, le

complexe classifiant sera construit par descente.

## 5.1 Groupe fondamental tempéré d'un log-schéma pluristable

Dans ce paragraphe nous définissons le groupe fondamental tempéré d'une fibration polystable sur un corps  $k$ , muni d'une log structure compatible (ce que nous appellerons une log fibration polystable). Pour définir notre groupe fondamental tempéré, nous aurons besoin d'une notion de "revêtement topologique" d'un revêtement két  $Z$  de notre log fibration polystable  $X \rightarrow \cdots \rightarrow k$ . Pour cela nous définirons pour tout tel  $Z$  un ensemble polysimplicial  $C(Z)$  au-dessus de  $C(X)$ , fonctoriellement en  $Z$ . Si  $Z$  est un revêtement két galoisien connexe de  $X$  de groupe  $G$ , l'action de  $G$  sur  $C(Z)$  définira une extension de groupes :

$$1 \rightarrow \pi_1^{\text{top}}(|C(Z)|) \rightarrow \Pi_Z \rightarrow G \rightarrow 1.$$

Notre groupe fondamental tempéré sera la limite projective des  $\Pi_Z$  quand  $Z$  parcourt les revêtements két galoisiens pointés de  $X$ .

### 5.1.1 Log schémas polystables

Coomençons par définir un analogue logarithmique des notions de morphismes polystables de schémas formels introduites dans la définition 1.4.1.

Soit  $S$  un log schéma fs.

**Définition 5.1.1.** Un morphisme  $\phi : Y \rightarrow X$  de log schémas fs sera appelé :

- *nodal standard* si  $X$  a une carte fs  $X \rightarrow \text{Spec } P$  et  $Y$  est isomorphe à  $X \times_{\text{Spec } \mathbf{Z}[P]} \mathbf{Z}[Q]$  avec  $Q = (P \oplus u\mathbf{N} \oplus v\mathbf{N})/(u \cdot v = a)$  où  $a \in P$ , et la log structure de  $Y$  est celle associée à  $Q$ .
- un *morphisme strictement plurinodal de log schémas* si pour tout point  $y \in Y$ , il existe un voisinage ouvert de Zariski  $X'$  de  $\phi(y)$  et un voisinage ouvert de Zariski  $Y'$  de  $y$  dans  $Y \times_X X'$  tels que  $Y' \rightarrow X'$  soit la composée de morphismes étales stricts et de morphismes plurinodaux standard.
- un *morphisme plurinodal de log schémas* si, localement pour la topologie étale de  $X$  et de  $Y$ , il est strictement plurinodal.
- un *morphisme strictement polystable de log schémas* si pour tout point  $y \in Y$ , il existe un voisinage ouvert de Zariski  $X'$  de  $\phi(y)$ , une carte fs  $P \rightarrow O(X')$  de la log structure de  $X'$ , un voisinage ouvert de Zariski  $Y'$  de  $y$  dans  $Y \times_X X'$  tel que  $Y' \rightarrow X'$  se factorise à travers un morphisme strict étale  $Y' \rightarrow X' \times_{\mathbf{Z}[P]} \mathbf{Z}[Q]$  où

$$Q = (P \oplus \bigoplus_{i=0}^p \langle T_{i0}, \dots, T_{in_i} \rangle) / (T_{i0} \cdots T_{in_i} = a_i)$$

avec  $a_i \in P$ .

- un *morphisme polystable de log schémas* si, localement pour la topologie étale de  $Y$  et de  $X$ , c'est un morphisme strictement polystable de log schémas.

Une *log fibration polystable* (resp. *log fibration strictement polystable*)  $\underline{X}$  sur  $S$  de longueur  $l$  est une suite de morphismes polystables (resp. strictement polystables) de log schémas  $X_l \rightarrow \cdots \rightarrow X_1 \rightarrow X_0 = S$ .

Un morphisme  $\underline{f} : \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$  de log fibrations polystables de longueur  $l$  est donné par des morphismes  $f_i : X_i \rightarrow Y_i$  de log schémas fs pour tout  $i$  tel que le diagramme évident commute.

Un morphisme  $\underline{f}$  de log fibrations polystables sera dit *két* (resp. *étales strict*) si  $f_i$  est *két* (resp. *étales strict*) pour tout  $i$ .

Une composée de morphismes plurinodaux est plurinodale. Par contre une composée de morphismes polystables n'est pas nécessairement polystable. Un morphisme polystable (resp. strictement polystable) de log schémas est plurinodal (resp. strictement plurinodal) car le morphisme

$$P \rightarrow Q = (P \oplus < T_0, \dots, T_n > / (T_0 \cdots T_n = a))$$

peut se décomposer en une suite de morphismes

$$\begin{aligned} P \rightarrow P_1 = P \oplus < T_0, T'_0 > / T_0 T'_0 = a \rightarrow P_2 = P_1 \oplus < T_1, T'_1 > / T_1 T'_1 = T'_0 \\ \rightarrow \cdots \rightarrow Q = P_{n-1} \oplus < T_{n-1}, T_n > / T_{n-1} T_n = T'_{n-2}. \end{aligned}$$

Un morphisme plurinodal de log schémas est log lisse et saturé.

*Remarque.* Dans la définition de morphismes strictement polystables de log schémas, si l'on choisit une autre carte  $P' \rightarrow O(X')$ , il existe un voisinage ouvert de Zariski  $X''$  de  $x$  dans  $X'$  tel que  $Y'' = Y' \times_{X'} X'' \rightarrow X''$  se factorise à travers un morphisme étales strict  $Y'' \rightarrow X'' \times_{\mathbf{Z}[P']} \mathbf{Z}[Q']$  où

$$Q' = (P' \oplus \bigoplus_{i=0}^p < T_{i0}, \dots, T_{in_i} > / (T_{i0} \cdots T_{in_i} = a'_i))$$

avec  $a'_i \in P'$ . En effet, on peut supposer  $X'$  affine. Ainsi  $X' = \text{Spec}(A)$ . Quite à remplacer  $X'$  par un voisinage ouvert de Zariski de  $x$ , on peut choisir  $a'_i$  qui a la même image dans  $\bar{M}(X')$  que  $a_i$  (rappelons que comme  $X'$  admet une carte globale, la log structure de  $X'$  est zariskienne, c'est-à-dire  $\epsilon^* \epsilon_* M = M$  où  $\epsilon : X_{\text{ét}} \rightarrow X_{\text{zar}}$ ). Ainsi, dans  $M(X')$ ,  $a'_i = a_i u_i$  avec  $u_i \in A^*$ . On remplace alors simplement  $T_{i0}$  par  $T_{i0} u_i$  pour tout  $i$ .

**Lemme 5.1.1.** *Soit  $\phi : Y \rightarrow X$  un morphisme plurinodal (resp. polystable) de schémas (au sens de la définition 1.4.1), tel que  $X$  ait une log structure log régulière  $M_X$  et que  $\phi$  soit lisse au-dessus de  $X_{\text{tr}}$ . Alors  $(Y, O_Y \cap j_* O_{Y_{X_{\text{tr}}}}^*) \rightarrow (X, M_X)$  est un morphisme plurinodal (resp. polystable) de log schémas.*

*Par le même argument, on en déduit le résultat pour un morphisme plurinodal standard. Le cas général s'en déduit par dévissage.*

*Démonstration.* Prouvons-le dans le cas d'un morphisme polystable.

On peut supposer que  $X = \text{Spec}(A)$  a une carte  $\psi : P \rightarrow A$  pour la log structure  $M_X$  et que  $Y = B_0 \times_X \cdots \times_X B_p$  avec  $B_i = \text{Spec } A[T_{i0}, \dots, T_{in_i}] / (T_{i0} \cdots T_{in_i} - a_i)$  avec  $a_i \in A$ . Puisque  $\phi$  est lisse sur  $X_{\text{tr}}$ ,  $a_i$  est inversible sur  $X_{\text{tr}}$ , alors quitte à localiser pour la topologie de Zariski et à multiplier  $a_i$  par un élément de  $A^*$  (ce qu'on peut faire quitte à multiplier  $T_{i0}$  par le même élément), on peut supposer

que  $a_i = \psi(p_i)$  pour un certain  $p_i \in P$ . Ainsi on a  $Y = X \times_{\mathbf{Z}[P]} \mathbf{Z}[Q]$  où  $Q = (P \oplus \bigoplus_{i=0}^p \langle T_{i0}, \dots, T_{in_i} \rangle) / (T_{i0} \dots T_{in_i} = p_i)$  avec  $p_i \in P$ . Si l'on munit  $Y$  de la log structure  $M_Y$  associée à  $Q$ ,  $Y \rightarrow X$  devient un morphisme polystable de log schémas. En particulier  $Y$  est log régulier ([26, th. 8.2]). Puisque l'ensemble des points de  $Y$  où  $M_Y$  est trivial est  $Y_{X_{\text{tr}}}$ ,  $M_Y = O_Y \cap j_* O_{Y_{X_{\text{tr}}}}^*$  d'après [34, prop. 2.6].  $\square$

Dans le lemme précédent, si  $(X, M_X)$  est supposé de plus Zariski log régulier, et  $\phi$  est strictement plurinodal (resp. strictement polystable), alors pour la log structure du lemme sur  $Y$ ,  $\phi$  est un morphisme strictement plurinodal (resp. strictement polystable) de log schémas.

### 5.1.2 Ensemble polysimplicial d'un log schéma két au-dessus d'une log fibration polystable

Soit  $s$  un log point.

Nous construisons ici l'ensemble polysimplicial associé à un log schéma két  $Z$  au-dessus d'une log fibration polystable  $X \rightarrow \dots \rightarrow s$ . Il faut essentiellement montrer que, localement pour la topologie étale de  $X$ , si  $x \leq y$  sont deux strates de  $X$ ,  $Z \rightarrow X$  induit naturellement une application  $Z_y \rightarrow Z_x$ , où  $Z_y$  (resp.  $Z_x$ ) est l'ensemble des composantes connexes de la préimage de  $Y$  (resp.  $x$ ). Pour cela nous étudierons la stratification de  $Z$  définie par  $\text{rk}(z) = \text{rk}(\overline{M}_{\bar{z}}^{\text{gp}})$  (où  $\bar{z}$  est un point géométrique au-dessus de  $z$ ). Cette stratification coïncide avec celle de Berkovich pour les schémas plurinodaux, et nous montrerons que localement pour la topologie étale un morphisme két  $X \rightarrow Y$  induit un isomorphisme entre les ensembles ordonnés des strates de  $X$  et de  $Y$ . Cela nous permettra de définir un ensemble polysimplicial de  $Z$  localement pour la topologie étale. Nous construirons alors l'ensemble polysimplicial associé à  $Z$  par descente (pour qu'il vérifie la même propriété que dans la proposition 1.4.3).

Pour une (log) fibration polystable  $\underline{X} : X \rightarrow \dots \rightarrow \text{Spec } k$ , Berkovich définit un ensemble polysimplicial  $C(\underline{X})$ . Dans cette partie nous voulons généraliser cette construction à n'importe quel  $Z$  két au-dessus de  $X$ .

Quand  $\underline{X}$  est strictement polystable,  $C(Z)$  sera défini de manière à ce que pour toute strate  $x$  de  $X$  de point générique  $\tilde{x}$  et pour tout objet  $x'$  de  $\Lambda / C(X)$  au-dessus de  $x$ , les objets de  $\Lambda / C(Z)$  au-dessus de  $x'$  seront en bijection naturelle avec  $\tilde{x}$  dans  $Z$ .

Quand  $\underline{X}$  n'est plus supposé strictement polystable, nous définissons  $C(Z)$  par descente étale.

Soit  $Z$  un log schéma fs, on obtient une stratification sur  $Z$  en disant qu'un point  $z$  de  $Z$  est de rang  $r$  si  $\text{rk}^{\log}(z) = \text{rk}(M_{\bar{z}}^{\text{gp}} / \mathcal{O}_{\bar{z}}^*) = r$  (où  $\bar{z}$  est un point géométrique au-dessus de  $z$  et  $\text{rk}$  est le rang d'un groupe abélien de type fini). Le sous-ensemble des points de  $Z$  de rang  $\leq r$  est ouvert dans  $Z$  ([35, cor 2.3.5]). Ainsi cela définit bien une stratification localement fermée.

Les strates de rang  $r$  de  $Z$  sont les composantes connexes de l'ensemble des points  $z$  d'ordre  $r$ . Les strates forment une partition de  $Z$ , et une strate de rang  $r$  est ouverte dans le fermé des points  $x$  de rang  $\geq r$ . Il est muni de la structure de sous-schéma réduit de  $Z$ .

L'ensemble des strates est ordonné par :  $x \leq y$  si et seulement si  $y \subset \bar{x}$ . On note

$\text{Str}_x(Z)$  l'ensemble ordonné des strates en dessous de  $x$  (c'est-à-dire contenant l'adhérence de  $x$ ).

Si  $f : Z' \rightarrow Z$  est un morphisme két, alors  $\text{rk}^{\log}(x) = \text{rk}^{\log}(f(x))$ . Ainsi les strates de  $Z'$  sont les composantes connexes des préimages des strates de  $Z$ .

Soit  $Z$  un log schéma plurinodal sur un log point  $s = (k, M_k)$  de caractéristique  $p$  et de rang  $r_0$ , et soit  $z$  un point de  $Z$ .

On a  $\text{rk}^{\log}(z) = r_0 + \text{rk}(z)$  où  $\text{rk}(z)$  est la codimension de la strate contenant  $z$  dans  $Z$  pour la stratification de Berkovich des schémas plurinodaux. Ainsi les strates de la stratification logarithmique et de la stratification de Berkovich sont les mêmes.

**Lemme 5.1.2.** *Soit  $Z \rightarrow \text{Spec } k$  un morphisme plurinodal de log schémas fs sur un log point et soit  $Z' \rightarrow Z$  un morphisme két. Alors les strates de  $Z'$  (munies de la structure de sous-schémas réduits) sont normales et donc irréductibles.*

Nous noterons parfois abusivement de la même façon une strate et son point générique.

*Démonstration.* Il suffit de le prouver localement pour la topologie étale. Supposons donc que  $Z \rightarrow \text{Spec } k$  a une carte exacte

$$\begin{array}{ccc} Z & \rightarrow & \text{Spec } P \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec } k & \rightarrow & \text{Spec } M \end{array}$$

où  $P$  est une carte de  $Z$ ,  $M$  est une carte de  $\text{Spec } k$  et  $Z \rightarrow \text{Spec } k[P] \times_{\text{Spec } k[M]} \text{Spec } k$  est étale.

Les strates de  $Z$  correspondent aux composantes connexes des préimages au-dessus des différents points de  $\text{Spec } P$  (et donc des faces de  $P$ ) qui sont au-dessus du point minimal de  $\text{Spec } M$ .

Soit  $P \rightarrow Q$  un morphisme  $(p')$ -kummérien de monoïdes (où  $p$  est la caractéristique de  $k$ , qui peut éventuellement être nulle). L'application  $\text{Spec } Q \rightarrow \text{Spec } P$  est alors bijective (à une face  $F$  de  $P$  correspond réciproquement le saturé  $F_Q$  de  $F$  dans  $Q$ ).

Soit donc  $F$  une face de  $P$  et  $\mathfrak{p}$  l'idéal premier  $P \setminus F$  (et  $F_Q$  et  $\mathfrak{p}_Q$  leurs saturés dans  $Q$ ).

Alors la préimage de la clôture du point  $\mathfrak{p}$  dans  $\text{Spec } P$  par le morphisme  $\text{Spec } k[P] \rightarrow \text{Spec } P$  correspond au sous-schéma  $\text{Spec } k[P]/k[\mathfrak{p}]$  de  $\text{Spec } k[P]$  d'après [35, I.3.2] (et c'est la clôture de la strate  $\text{Str } F$  de  $\text{Spec } k[P]$  correspondant à  $F$ ). Mais

$$\text{Spec}(k[Q]/k[\mathfrak{p}_Q]) \rightarrow \text{Spec}(k[Q]/(k[\mathfrak{p}]k[Q])) = \text{Spec } k[Q] \times_{k[P]} \text{Spec}(k[P]/k[\mathfrak{p}])$$

est juste le plongement du sous-schéma réduit (car  $k[\mathfrak{p}_Q]/(k[\mathfrak{p}]k[Q])$  est un idéal nilpotent  $k[Q]/(k[\mathfrak{p}]k[Q])$ ). Ainsi la préimage de la clôture de la strate correspondant à  $F$  est le support du sous-schéma fermé  $\text{Spec}(k[Q]/k[\mathfrak{p}_Q])$ .



De plus, il existe d'après [35, I.3.2] des isomorphismes canoniques de  $k$ -algèbres  $k[P]/k[\mathfrak{p}] \rightarrow k[F]$  et  $k[Q]/k[\mathfrak{p}_Q] \rightarrow k[F_Q]$  (mais la log structure sur  $\mathrm{Spec} k[F]$  obtenue par l'isomorphisme de schéma affine correspondant n'est pas celle induite par  $F$ ) et le diagramme de  $k$ -algèbres suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} k[P]/k[\mathfrak{p}] & \simeq & k[F] \\ \downarrow & & \downarrow \\ k[Q]/k[\mathfrak{p}_Q] & \simeq & k[F_Q] \end{array}$$

( $k[F] \rightarrow k[F_Q]$  étant induit par le plongement de monoïdes  $F \rightarrow F_Q$ ).

La préimage de  $F$  par  $\mathrm{Spec} k[P] \rightarrow \mathrm{Spec} P$  (c'est-à-dire la strate  $\mathrm{Str} F$  de  $\mathrm{Spec}(k[P])$ ) correspond alors à l'ouvert  $\mathrm{Spec} k[F^{\mathrm{gp}}]$  de  $\mathrm{Spec} k[F] \simeq \mathrm{Spec} k[P]/k[\mathfrak{p}]$ .

Le carré suivant

$$\begin{array}{ccc} k[F] & \rightarrow & k[F^{\mathrm{gp}}] \\ \downarrow & & \downarrow \\ k[F_Q] & \rightarrow & k[F_Q^{\mathrm{gp}}] \end{array}$$

est cocartésien. Mais  $\mathrm{Spec} k[F_Q^{\mathrm{gp}}] \rightarrow \mathrm{Spec} k[F^{\mathrm{gp}}]$  est étale. Ainsi,  $(\mathrm{Str} F \times_{\mathrm{Spec} k[P]} \mathrm{Spec} k[Q])^{\mathrm{red}} \rightarrow \mathrm{Str} F$  est étale.

En faisant le changement de base  $Z \rightarrow \mathrm{Spec} P$ , on obtient que le morphisme d'une strate de  $Z_Q$  à la strate correspondante de  $Z$  est étale. Comme les strates de  $Z$  sont normales, celles de  $Z_Q$  aussi (et donc celles de  $Z'$  aussi).  $\square$

**Lemme 5.1.3.** *Soit  $Z' \rightarrow Z$  un morphisme két et  $Z \rightarrow \mathrm{Spec} k$  un morphisme strictement plurinodal de log schémas, alors  $Z'$  est quasinormal (cf. 1.4).*

*Démonstration.* Nous montrerons que la clôture de la préimage dans  $Z'$  d'une strate de  $x$  de  $Z$  est normale. On peut le faire localement pour la topologie étale de  $Z'$  (mais pas de  $Z$ ).

Soit  $z$  un point de  $Z'$ .

On peut supposer que  $Z'$  est connexe et  $Z' \rightarrow \mathrm{Spec} k$  a une carte fs exacte en  $z$

$$\begin{array}{ccc} Z' & \rightarrow & \mathrm{Spec} P \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spec} k & \rightarrow & \mathrm{Spec} M \end{array},$$

telle que  $M$  soit aigu et  $Z' \rightarrow \mathrm{Spec} k \times_{\mathrm{Spec} \mathbf{Z}[M]} \mathrm{Spec} \mathbf{Z}[P]$  soit étale.

Alors les préimages des différents points de  $\mathrm{Spec} P$  (c'est-à-dire les idéaux premiers de  $P$ ) s'envoient toutes sur des strates différentes de  $Z$ , puisque  $Z$  est strictement plurinodal.

Ainsi, l'image réciproque de  $x$  est soit vide soit l'image réciproque de  $\mathfrak{p}$  pour un certain idéal premier  $\mathfrak{p}$  de  $\mathrm{Spec} P$ .

$\mathrm{Spec} k \rightarrow \mathrm{Spec} k[M]$  est l'immersion fermée correspondant à la face  $M^* = \{0\}$  de  $M$  (et à l'idéal premier  $M \setminus \{0\}$ ). Ainsi il s'identifie à  $\mathrm{Spec} k[M]/k[M \setminus \{0\}] \rightarrow \mathrm{Spec} k[M]$ . On a alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec} k[P]/k[P(M \setminus \{0\})] & \rightarrow & \mathrm{Spec} k[P] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spec} k[M]/k[M \setminus \{0\}] & \rightarrow & \mathrm{Spec} k[M] \end{array}$$

Le strates de  $\text{Spec } k[P]/k[P(M \setminus \{0\})]$  correspondent bijectivement aux idéaux premiers  $\mathfrak{p}$  de  $P$  qui contiennent  $P(M \setminus \{0\})$  et l'adhérence de la strate correspondante est  $\text{Spec } k[P]/k[\mathfrak{p}] \simeq \text{Spec } k[F]$  (où  $F$  est la face  $P \setminus \mathfrak{p}$ ).  $\text{Spec } k[F]$  est connexe, et grâce à [35, prop I.3.3.1 (2)], puisque  $F$  est un monoïde fs (car  $P$  est fs et  $F$  est une face de  $P$ ),  $\text{Spec } k[F]$  est normal (donc irréductible : il existe une unique strate au-dessus de  $\mathfrak{p}$ ). Les clôtures des strates de  $\text{Spec } k \times_{k[M]} \text{Spec } k[P]$  sont donc également normales.  $\square$

On peut alors prouver l'analogue de [7, lem 2.10] (dont la preuve donne le résultat pour n'importe quel morphisme quasinormal) dans le cas où  $Z$  est két au-dessus d'un log schéma strictement plurinodal :

**Lemme 5.1.4.** *Soit  $\phi : Z' \rightarrow Z$  un morphisme étale avec  $Z$  két au-dessus de  $Z_0$  et soit  $Z_0 \rightarrow k$  un morphisme strictement plurinodal. Soit  $z'$  une strate de  $Z'$  d'image  $z$ . Alors l'application  $\text{Str}_{z'}(Z') \rightarrow \text{Str}_z(Z)$  est un isomorphisme d'ensembles ordonnés.*

*Démonstration.* Les éléments minimaux des deux ensembles sont les points génériques des composantes irréductibles de  $Z'$  et  $Z$  passant par  $z'$  et  $z$  respectivement. Il s'en suit que  $\text{Str}_{z'}(Z') \cap \text{Norm}(Z') \rightarrow \text{Str}_z(Z) \cap \text{Norm}(Z)$  est bijectif. On s'est ramené à prouver le résultat pour  $Z'^{(1)} \rightarrow Z^{(1)}$ , ce qui prouve par récurrence que  $\text{Str}_{z'}(Z') \rightarrow \text{Str}_z(Z)$  est bijectif. Il reste à prouver que l'application réciproque est croissante, c'est-à-dire que si  $\phi(z'_2) \leq \phi(z'_1)$ , alors  $z'_2 \leq z'_1$ . Comme  $\phi(z'_2)$  est normal,  $\phi^{-1}(\overline{\phi(z'_2)})$  est l'union disjointe de ces composantes irréductibles et donc  $\overline{z'_2}$  est la seule contenant  $z'$ . Il s'en suit que  $z'_2 \leq z'_1$ .  $\square$

On peut obtenir un raffinement de 5.1.4 en prouvant le résultat pour  $Z' \rightarrow Z$  két :

**Lemme 5.1.5.** *Soit  $Z \rightarrow Z'$  un morphisme két avec  $Z'$  két sur  $Z''$  et soit  $Z'' \rightarrow k$  un morphisme strictement plurinodal. Soit  $z$  une strate de  $Z$  d'image  $z'$  dans  $Z'$ . Alors l'application  $\text{Str}_z(Z) \rightarrow \text{Str}_{z'}(Z')$  est un isomorphisme d'ensembles ordonnés.*

*Démonstration.* Il suffit de le prouver quand  $Z' = Z''$ , puisque si l'on connaît le résultat pour  $Z' \rightarrow Z''$  et  $Z \rightarrow Z''$ , cela implique le résultat pour  $Z \rightarrow Z'$ .

Si  $Z'_0 = \text{Spec } k \times_{k[M]} \text{Spec } k[P]$  et  $Z_0 = \text{Spec } k \times_{k[M]} \text{Spec } k[Q]$  où  $P \rightarrow Q$  est két, alors l'ensemble ordonné des strates de  $Z'_0$  (resp.  $Z_0$ ) est isomorphe à l'ensemble ordonné des strates de  $P$  (resp.  $Q$ ) qui s'envoient sur la face  $M^*$  de  $M$ . Mais comme l'application de l'ensemble des strates de  $Q$  dans l'ensemble des strates de  $P$  est un isomorphisme,  $\text{Str } Z'_0 \rightarrow \text{Str } Z_0$  est un isomorphisme, et a fortiori  $\text{Str}_{z_0}(Z_0) \rightarrow \text{Str}_{z'_0}(Z'_0)$ .

Dans le cas général, localement dans un voisinage de Zariski de  $z$  et de  $z'$ , il existe un diagramme commutatif comme suit :

$$\begin{array}{ccccc} Z & \leftarrow & U & \rightarrow & Z_0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ Z' & = & Z' & \rightarrow & Z'_0 \end{array}$$

où les flèches horizontales sont étales : elles vérifient le lemme 5.1.4. Grâce au cas particulier précédent, on obtient le résultat.  $\square$

Considérons maintenant une log fibration strictement polystable  $\underline{X} : X \rightarrow X_{l-1} \rightarrow \cdots \rightarrow s$  où  $s$  est un log point fs.  
Si  $f : Z \rightarrow X$  est két, on a un foncteur

$$D_Z : (\mathbf{\Lambda} / C(\underline{X}))^{\text{op}} \text{Ens}$$

obtenu comme la composée des deux foncteurs

$$(\mathbf{\Lambda} / C(\underline{X}))^{\text{op}} \rightarrow \text{Str}(X_s) \rightarrow \text{Ens}$$

où le foncteur de droite associe à une strate de  $X$  l'ensemble des composantes connexes de la préimage de cette strate (la fonctorialité vient du lemme 5.1.5).  
Si  $C$  est un ensemble polysimplicial et  $D : (\mathbf{\Lambda} / C)^{\text{op}} \rightarrow \text{Ens}$  on peut définir un ensemble polysimplicial  $C \square D$  défini par  $(C \square D)_{\mathbf{n}} = \coprod_{x \in C_{\mathbf{n}}} D(x)$  et, pour  $f : \mathbf{m} \rightarrow \mathbf{n}$  et  $d \in D(x)$  avec  $x \in C_{\mathbf{n}}$ ,  $f^*d = D(f_x)(d) \in D(f^*x) \subset \coprod_{y \in C_{\mathbf{m}}} D(y)$  (c'est un cas particulier trivial de la construction faite par Berkovich et rappelé dans 1.4).

Cette construction définit donc un ensemble polysimplicial

$$C_{\underline{X}}(Z) = C(\underline{X}) \square D_Z$$

(nous écrirons souvent  $C(Z)$  à la place de  $C_{\underline{X}}(Z)$ ). Cet ensemble polysimplicial est encore intérieurement libre.  $O(C(Z))$  est isomorphe à  $\text{Str}(Z)$  fonctoriellement en  $Z$ .

*Remarque.* Soit  $C \rightarrow C'$  un morphisme d'ensembles polysimpliciaux. Soit  $\alpha : S \rightarrow O(C)$  (resp.  $\alpha' : S' \rightarrow O(C')$ ) un morphisme d'ensembles ordonnés tel que  $S_{\leq x} \xrightarrow{\sim} O(C)_{\leq \alpha(x)}$  (resp.  $S'_{\leq x} \xrightarrow{\sim} O(C')_{\leq \alpha'(x)}$ ) pour tout  $x$ . On a des foncteurs

$$D : \mathbf{\Lambda} / C \rightarrow O(C) \rightarrow \text{Ens} \quad (\text{resp. } D' : \mathbf{\Lambda} / C' \rightarrow O(C') \rightarrow \text{Ens}),$$

qui définissent un ensemble polysimplicial  $C_1 = C \square D$  (resp.  $C'_1 = C' \square D'$ ). On a  $O(C_1) = S$  et  $O(C'_1) = S'$ .

Soit  $f : S \rightarrow S'$  morphisme d'ensembles ordonnés tel que

$$\begin{array}{ccc} S & \rightarrow & S' \\ \downarrow & & \downarrow \\ O(C) & \rightarrow & O(C') \end{array}$$

commute. Alors on a une application naturelle  $C_{1,\mathbf{n}} = \coprod_{x \in C_{\mathbf{n}}} S_x \rightarrow \coprod_{x' \in C'_{\mathbf{n}}} S'_{x'} = C'_{1,\mathbf{n}}$  qui définit un morphisme d'ensembles polysimpliciaux  $\underline{f} : C_1 \rightarrow C'_1$  au-dessus de  $C \rightarrow C'$  tel que  $O(\underline{f}) = f$  (il est facile de voir que  $\underline{f}$  est en fait le seul morphisme  $\tilde{f} : C_1 \rightarrow C'_1$  au-dessus de  $C' \rightarrow C$  tel que  $O(\tilde{f}) = f$ ).

Grâce à cela, pour construire des morphismes entre les ensembles polysimpliciaux de log schémas két au-dessus de log schémas strictement plurinodaux, il nous suffira souvent de construire un morphisme entre les ensembles ordonnés des strates.

Si  $\underline{X}' \rightarrow \underline{X}$  est un morphisme két de log fibrations polystables, alors  $C_{\underline{X}}(X'_l)$  est canoniquement isomorphe à  $C(\underline{X}')$ .

Si l'on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} Z' & \rightarrow & Z' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \underline{X}' & \rightarrow & \underline{X} \end{array}$$

où  $\underline{X}' \rightarrow \underline{X}$  est un morphisme két de log fibrations strictement polystables, il existe un morphisme induit  $C_{\underline{X}'}(Z') \rightarrow C_{\underline{X}}(Z)$ . Si  $\text{Str}(Z') \rightarrow \text{Str}(Z)$  est un isomorphisme d'ensembles ordonnés, alors  $C_{\underline{X}'}(Z') \rightarrow C_{\underline{X}}(Z)$  est un isomorphisme (car il envoie les polysimplices non dégénérés sur les polysimplices non dégénérés et les complexes polysimpliciaux sont intérieurement libres). Soit  $Z' \rightarrow Z$  un recouvrement két, soit  $Z'' = Z' \times_Z Z'$  et soit  $x$  une strate de  $X_s$ , alors  $D_Z(x) = \text{Coker}(D_{Z''}(x) \rightrightarrows D_{Z'}(x))$ . On en déduit que

$$C(Z) \rightarrow \text{Coker}(C(Z'') \rightrightarrows C(Z'))$$

est un isomorphisme.

On peut aussi définir  $C_{\underline{X}}(Z)$  pour  $\underline{X}$  une fibration polystable générale. Soit  $\underline{X}' \rightarrow \underline{X}$  un recouvrement étale avec  $\underline{X}'$  strictement polystable, soit  $\underline{X}'' = \underline{X}' \times_{\underline{X}} \underline{X}'$  et soit  $Z'$  et  $Z''$  les pullbacks de  $Z$  à  $X'$  et  $X''$ . On définit alors

$$C_{\underline{X}}(Z) = \text{Coker}(C_{\underline{X}''}(Z'') \rightrightarrows C_{\underline{X}'}(Z')).$$

Par un argument souvent utilisé dans [7], on déduit de l'équation précédente que cela ne dépend pas du choix de  $\underline{X}'$ . En effet soit  $\underline{X}_1$  et  $\underline{X}_2$  deux recouvrement étales par une log fibration strictement polystable de  $\underline{X}$ . Posons  $\underline{X}_{11} := \underline{X}_1 \times_{\underline{X}} \underline{X}_1$ ,  $\underline{X}_{12} := \underline{X}_1 \times_{\underline{X}} \underline{X}_2$ ,  $\underline{X}_{22} := \underline{X}_2 \times_{\underline{X}} \underline{X}_2$ ,  $\underline{X}_{112} := \underline{X}_{11} \times_{\underline{X}} \underline{X}_2$ ,  $\underline{X}_{122} := \underline{X}_1 \times_{\underline{X}} \underline{X}_{22}$ ,  $\underline{X}_{1122} = \underline{X}_{11} \times_{\underline{X}} \underline{X}_{22}$  et nous aurons des notations similaires en remplaçant  $\underline{X}$  par  $Z$  quand on fait le changement de base  $Z \rightarrow X$ . On obtient alors

$$\begin{aligned} \text{Coker}(C(Z_{11}) \rightrightarrows C(Z_1)) &= \text{Coker}(\text{Coker}(C(Z_{1122}) \rightrightarrows C(Z_{112})) \\ &\quad \rightrightarrows \text{Coker}(C(Z_{122}) \rightrightarrows C(Z_{12}))) \\ &= \text{Coker}(\text{Coker}(C(Z_{1122}) \rightrightarrows C(Z_{122})) \\ &\quad \rightrightarrows \text{Coker}(C(Z_{112}) \rightrightarrows C(Z_{12}))) \\ &\quad \text{par intervention de colimites} \\ &= \text{Coker}(C(Z_{22}) \rightrightarrows C(Z_2)). \end{aligned}$$

$C_{\underline{X}}(Z)$  est donc bien défini (qu'on notera souvent simplement  $C(Z)$  par abus de notation).

Si  $Z' \rightarrow Z$  est un morphisme két surjectif au-dessus de  $\underline{X}$  et  $Z'' = Z' \times_Z Z'$ , alors  $C(Z) = \text{Coker}(C(Z'') \rightrightarrows C(Z'))$ .

On obtient donc ( $\text{két}(X)$  est la catégorie des log schémas két sur  $X$ ) :

**Proposition 5.1.6.** *Soit  $\underline{X}$  une log fibration polystable, on a un foncteur  $C_{\underline{X}} : \text{két}(X) \rightarrow \mathbf{A}^\circ \text{Ens}$  tel que :*

- si  $Z' \rightarrow Z$  est un recouvrement dans  $\text{két}(X_s)$ ,

$$C_{\underline{X}}(Z) = \text{Coker}(C_{\underline{X}}(Z' \times_Z Z') \rightrightarrows C_{\underline{X}}(Z')).$$

- $O(C_{\underline{X}}(Z))$  est fonctoriellement isomorphe à  $\text{Str}(Z)$ .

*Remarque.* Si l'on a un morphisme két  $\underline{Y} \rightarrow \underline{X}$  de fibrations polystables de longueur  $l$ , le complexe polysimplicial  $C(Y_l)$  que l'on vient de définir en considérant  $Y_l$  comme étant dans  $\text{két}(X_l)$  est canoniquement isomorphe au complexe polysimplicial de la fibration polystable  $C(\underline{Y})$  défini par Berkovich.

Si  $s$  est un log point et  $s'$  est un revêtement két connexe, on note  $\tilde{s}'$  le sous-log-schéma strict réduit de  $s'$ . C'est un log point.

**Proposition 5.1.7.** *Supposons  $Z$  quasicompact. Il existe un revêtement két connexe  $s' \rightarrow s$  tel que pour tout morphisme de log points  $fs s'' \rightarrow \tilde{s}'$ ,  $C(Z_{s''}) \rightarrow C(Z_{s'})$  soit un isomorphisme.*

*Démonstration.* Si  $Z$  est quasicompact et  $\underline{X}$  est strictement polystable, il existe un revêtement két connexe  $s' \rightarrow s$  tel que toutes les strates de  $Z_{\tilde{s}'}$  soient géométriquement irréductibles et que  $Z_{s'} \rightarrow s'$  soit saturé. En particulier, pour tout morphisme de log points  $s'' \rightarrow \tilde{s}'$ ,  $C(Z_{s''}) \rightarrow C(Z_{\tilde{s}'})$  est un isomorphisme (puisque les complexes sont intérieurement libres).

Si l'on ne suppose plus  $\underline{X}$  strictement polystable, soit  $\underline{X}' \rightarrow \underline{X}$  un recouvrement étale de type fini avec  $\underline{X}'$  strictement polystable. Alors, il existe un revêtement két connexe  $s'$  pour lequel  $C(Z_{s''}) \rightarrow C(Z_{\tilde{s}'})$  et  $C(Z'_{s''}) \rightarrow C(Z'_{\tilde{s}'})$  sont des isomorphismes pour toute extension  $s''$  de  $\tilde{s}'$ .  $C(Z_{s''}) \rightarrow C(Z_{\tilde{s}'})$  est donc également un isomorphisme.  $\square$

Le complexe polysimplicial  $C(Z_{\tilde{s}'})$  pour un tel  $s'$  est noté  $C_{\text{géo}}(Z/s)$ . Si  $Z' \rightarrow Z$  est un recouvrement két dont le morphisme de schéma sous-jacent est de type fini, notons  $Z'' = Z' \times_Z Z'$ . On a encore  $C_{\text{géo}}(Z/s) = \text{Coker}(C_{\text{géo}}(Z'/s) \rightrightarrows C_{\text{géo}}(Z/s))$ .

### 5.1.3 Groupe fondamental tempéré d'une log fibration polystable

Nous définissons ici le groupe fondamental tempéré d'une log fibration polystable  $\underline{X} : X \rightarrow \cdots \rightarrow \text{Spec } k$  sur un log point fs. Si  $T$  est un revêtement két de  $X$ , les revêtements topologiques de  $|C(T)|$  joueront le rôle de revêtements topologiques de  $T$ .

Commençons par une construction catégorique de groupes fondamentaux tempérés que nous utiliserons plus tard dans notre situation logarithmique.

Considérons une catégorie fibrée  $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  vérifiant les propriétés suivantes :

- $\mathcal{C}$  est une catégorie galoisienne,
- pour tout objet connexe  $U$  de  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{D}_U$  est équivalente à la catégorie  $\Pi_U$ -Ens pour un certain groupe discret  $\Pi_U$ ,
- Si  $U$  et  $V$  sont deux objets de  $\mathcal{C}$ , le foncteur  $\mathcal{D}_U \amalg_V \mathcal{D}_V \rightarrow \mathcal{D}_U \times \mathcal{D}_V$  est une équivalence,
- si  $f : U \rightarrow V$  est un morphisme dans  $\mathcal{C}$ ,  $f^* : \mathcal{D}_V \rightarrow \mathcal{D}_U$  est exact.

Alors, on peut définir une catégorie fibrée  $\mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{C}$  telle que la fibre en  $U$  soit la catégorie des données de descente de  $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  pour le morphisme  $U \rightarrow e$  (où  $e$  est l'élément final de  $\mathcal{C}$ ).

Soit  $U$  un objet galoisien connexe de  $\mathcal{C}$  et soit  $H$  le groupe de Galois de  $U/e$ . On peut voir  $H$  comme une catégorie ayant un unique objet  $u$ , tel que  $\text{End}(u) = H$ . On a un foncteur  $H \rightarrow \mathcal{C}$ , qui envoie  $u$  sur  $U$ . La catégorie  $\mathcal{D}'_U$  est naturellement équivalente à la catégorie  $\mathcal{B}(\mathcal{D}/H)$  des sections cartésiennes de la catégorie fibrée  $\mathcal{D} \times_{\mathcal{C}} H/H$ .  $\mathcal{D} \times_{\mathcal{C}} H/H$  est un complexe classifiant.

Supposons que l'on ait un scindage de  $\mathcal{D}/\mathcal{C}$ .

Alors  $\mathcal{D}'_U$  peut être décrit de la façon suivante :

- ces objets sont les couples  $T_U = (S_U, (\psi_h)_{h \in H})$ , où  $S_U$  est un objet de  $\mathcal{D}_U$  et  $\psi_h : S_U \rightarrow h^* S_U$  est un isomorphisme dans  $\mathcal{D}_U$  tel que pour tout  $h, h' \in G$ ,  $(h^* \psi'_h) \circ \psi_h = \psi_{h'h}$  (après avoir identifié  $(h'h)^*$  et  $h^* h'^*$  par l'isomorphisme canonique pour simplifier les notations).
- un morphisme  $(S_U, (\psi_h)) \rightarrow (S'_U, \psi'_h)$  est un morphisme  $\phi : S_U \rightarrow S'_U$  dans  $\mathcal{D}_U$  tel que pour tout  $g \in G$ ,  $\psi'_h \phi = (h^* \phi) \psi_h$ .

Il existe un foncteur naturel  $F_0 : \mathcal{D}'_U \rightarrow \mathcal{D}_U$ , qui envoie  $(S_U, (\psi_h))$  vers  $S_U$ . Soit  $F_U$  un foncteur fondamental  $\mathcal{D}_U \rightarrow \text{Ens}$ , tel que  $\text{Aut } F_U = \Pi_U$ .

Soient  $F := F_U F_0$  et  $\Pi'_U := \text{Aut } F$  (muni de la topologie discrète).

**Proposition 5.1.8.** – *Le foncteur naturel  $\mathcal{D}'_U \rightarrow \Pi'_U\text{-Ens}$  est une équivalence de catégories.*  
– *Il existe une suite exacte naturelle*

$$1 \rightarrow \Pi_U \rightarrow \Pi'_U \rightarrow H \rightarrow 1.$$

*Démonstration.* En effet, on sait déjà que  $\mathcal{D}'_U$  est une catégorie classifiante. Ainsi il suffit de prouver que son groupe fondamental est discret, c'est-à-dire qu'il existe un objet  $T^\infty$  (appelé revêtement universel) tel que pour tout  $t^\infty \in F(T^\infty)$  et pour tout objet  $T$  et tout  $t \in F(T)$ , il existe un unique morphisme  $f : T^\infty \rightarrow T$  tel que  $F(f)(t^\infty) = t$ . En effet, si  $\Pi'_U$  est un groupe discret,  $\Pi'_U$  muni de l'action de  $\Pi'_U$  par translation à gauche est un revêtement universel de  $\Pi'_U\text{-Ens} \simeq \mathcal{D}'_U$ . Réciproquement, soient  $(T^\infty, t^\infty)$  un revêtement universel pointé et  $\alpha \in \text{Stab}_{t^\infty}^{\Pi'_U}$ . Soit  $(T, t)$  un objet pointé et  $f : T^\infty \rightarrow T$  qui envoie  $t^\infty$  en  $t$ . Alors  $\alpha_T(t) = \alpha_T(F(f)(t^\infty)) = F(f)\alpha_{T^\infty}(t^\infty) = F(f)(t^\infty) = t$ , donc  $\alpha$  est l'identité. L'élément neutre de  $\Pi'_U$  est donc un sous-groupe ouvert de  $\Pi'_U$  et donc  $\Pi'_U$  est discret.

Soit  $S^\infty$  un objet universel de  $\mathcal{D}_U$  et soit  $S^0 = \coprod_{g \in H} g^* S^\infty$ , et

$$\psi_h : S^0 = \coprod_{g \in H} g^* S^\infty = \coprod_{gh \in H} (gh)^* S^\infty \xrightarrow{\sim} \coprod_{g \in H} h^* g^* S^\infty = h^* \left( \coprod_{g \in H} g^* S^\infty \right) = h^* S^0.$$

Cela définit un objet  $T^\infty$  de  $\mathcal{D}'_U$ . Soit  $t^\infty$  un élément de  $F(t^\infty) = \coprod_g F_U(g^* S^\infty)$  et soit  $g_0$  tel que  $F(t^\infty)$  soit dans  $F_U(g_0^* S^\infty)$ .

Soit  $T$  un objet de  $\mathcal{D}'_U$  et  $t \in F(T)$   $g_0^* S^\infty$  est également un objet universel de  $\mathcal{D}_U$ , donc il existe un unique morphisme  $f_0 : g_0^* S^\infty \rightarrow F_0(T)$  dans  $\mathcal{D}_U$  qui envoie  $t^\infty$  sur  $t$ . La restriction à  $g_0^* S^\infty$  d'un morphisme  $f$  de  $T^\infty$  vers  $T$  doit donc être  $f_0$ .

Mais l'hypothèse d'équivariance des morphismes de  $\mathcal{D}'_U$  revient à dire que pour tout  $g$ , la restriction à  $(g_0 h)^* S^\infty = h^* g_0^* S^\infty$  est  $\psi_{h, T}^{-1} \circ h^* f_0 : h^* g_0^* S^\infty \rightarrow F_0(h^* T) \rightarrow F_0(T)$ , ce qui prouve l'unicité de  $f$ . Mais cette formule définit bien un morphisme  $\coprod h^* S^\infty \rightarrow F_0(T)$ , dont on vérifie facilement qu'elle vérifie la propriété d'équivariance voulue, ce qui montre l'existence de  $f$ .

$F_0$  induit un morphisme  $\Pi_U \rightarrow \Pi'_U$ . Comme  $F_0(T^\infty)$  est une somme directe d'objets universels de  $\mathcal{D}_U$ ,  $\Pi_U$  agit librement sur  $F(T^\infty)$  et donc  $F_0$  est injectif. Il existe aussi un foncteur exact naturel  $F_1 : H\text{-Ens} \rightarrow \mathcal{D}'_U$  qui envoie un  $H$ -ensemble  $Y$  vers un couple  $(Y = \coprod_{y \in Y} \{y\}, (\psi_h))$  où  $Y$  est un objet constant de  $\mathcal{D}_U$  et  $\psi_h$  envoie  $y$  vers  $h \cdot y$ .

Ce foncteur est pleinement fidèle et  $FF_1$  est canoniquement isomorphe au foncteur oubli  $H\text{-Ens} \rightarrow \text{Ens}$ .  $F_1$  induit donc un morphisme surjectif  $\Pi'_U \rightarrow H$ . Comme  $F_0F_1(Y)$  est un objet constant de  $\mathcal{D}_U$ , le composé  $\Pi_U \rightarrow \Pi'_U \rightarrow H$  est trivial.

On a aussi un foncteur (non exact)  $H_0 : \mathcal{D}'_U \rightarrow H\text{-Ens}$  qui envoie  $(S_U, (\psi_h))$  sur l'ensemble des composantes connexes de l'objet  $S_U$  de  $\mathcal{D}_U$ , où l'action de  $g \in G$  est induite par  $\psi_h$ . Si  $S = (S_U, (\psi_h))$  est un objet connexe de  $\mathcal{D}'_U$  tel que  $F_0(S) = S_U$  a une composante connexe triviale,  $S \rightarrow F_1H_0(S)$  est un isomorphisme et donc  $S$  est dans l'image essentiel de  $F_1$ . Ainsi la suite  $\Pi_U \rightarrow \Pi'_U \rightarrow H$  est bien exacte en  $\Pi'_U$ .  $\square$

On peut faire une construction explicite de  $\Pi'_U$  en terme d'un scindage de la catégorie fibrée. Si  $g$  est un élément d'un groupe  $G$ , notons  $\iota(g) \in \text{Aut}(G)$  la conjugaison par  $g$ .

Un scindage de la catégorie fibrée sur  $H$  (vue comme catégorie avec un seul objet et dont tous les morphismes sont inversibles) de fibre  $\Pi\text{-Ens}$  et une famille d'isomorphismes de foncteurs  $(h^*F_U \rightarrow F_U)_{h \in H}$  revient à se donner :

- $\alpha_h \in \text{Aut } \Pi$  pour tout  $h \in H$ ,
- $g_{h,h'} \in \Pi$  pour tout  $(h, h') \in H^2$  tels que
  - $\alpha_h \alpha_{h'} = \iota(g_{h,h'}) \alpha_{hh'}$
  - $g_{h,h'} g_{hh',h''} = \alpha_h(g_{h',h''}) g_{h,h'h''}$  pour tout  $(h, h', h'') \in H^3$

Une construction de Schreier permet d'associer à de telles données une extension de  $H$  par  $\Pi$  (et toute extension est de cette forme-ci).

Définissons l'ensemble

$$\Pi \rtimes H = \{(\alpha, h, g) \in \text{Aut } \Pi \times H \times \Pi \mid \alpha = \iota(g) \alpha_h\}$$

muni de la multiplication

$$(\alpha, h, g)(\alpha', h', g') = (\alpha\alpha', hh', g\alpha_h(g')g_{h,h'}).$$

Elle est bien définie car

$$\iota(g\alpha_h(g')g_{h,h'})\alpha_{hh'} = \iota(g)\iota(\alpha_h(g'))\alpha_h\alpha_{h'} = \iota(g)\alpha_h\iota(g')\alpha_{h'} = \alpha\alpha'.$$

On vérifie que la multiplication est bien associative :

$$((\alpha, h, g)(\alpha', h', g'))(\alpha'', h'', g'') = (\alpha\alpha'\alpha'', hh'h'', g_1) \text{ avec}$$

$$g_1 = g\alpha_h(g')g_{h,h'}\alpha_{hh'}(g'')g_{hh',h''}$$

$$\text{et } (\alpha, h, g)((\alpha', h', g')(\alpha'', h'', g'')) = (\alpha\alpha'\alpha'', hh'h'', g_2) \text{ avec}$$

$$\begin{aligned} g_2 &= g\alpha_h(g'\alpha_{h'}(g'')g_{h',h''})g_{h,h'h''} \\ &= g\alpha_h(g')\alpha_h \circ \alpha_{h'}(g'')\alpha_h(g_{h',h''})g_{h,h'h''} \\ &= g\alpha_h(g')i(g_{h,h'}) \circ \alpha_{hh'}(g'')\alpha_h(g_{h',h''})g_{h,h'h''} \\ &= g\alpha_h(g')g_{h,h'}\alpha_{hh'}(g'')g_{h,h'}^{-1}\alpha_h(g_{h',h''})g_{h,h'h''} \\ &= g\alpha_h(g')g_{h,h'}\alpha_{hh'}(g'')g_{h,h'}^{-1}g_{h,h'}g_{hh',h''} \\ &= g\alpha_h(g')g_{h,h'}\alpha_{hh'}(g'')g_{hh',h''}. \end{aligned}$$

$(1, 1, g_{1,1}^{-1})$  est élément neutre de  $\Pi \rtimes H$  et

$$(\alpha, h, g)^{-1} = (\alpha^{-1}, h^{-1}, g_{1,1}^{-1}g_{h^{-1},h}^{-1}\alpha_{h^{-1}}(g)^{-1}).$$

On obtient bien un groupe qui ne dépend essentiellement pas du choix des isomorphismes  $h^*F_U \rightarrow F_U$ .

Effectivement si l'on a une famille  $(\gamma_h)_{h \in H}$  et que l'on définit  $(\beta_h), (\tilde{g}_{h,h'})_{(h,h')}$  par  $\beta_h = \iota(\gamma_h)\alpha_h$  et  $\tilde{g}_{h,h'} = \gamma_h\alpha_h(\gamma_{h'})g_{h,h'}\gamma_{hh'}^{-1}$ , ce qui fournit un nouveau scindage de la catégorie fibrée, et l'application  $(\alpha, h, g) \mapsto (\alpha, h, g\gamma_h)$  est un isomorphisme entre les deux constructions de  $\Pi \rtimes H$ .

On a un morphisme injectif  $\Pi \rightarrow \Pi \rtimes H$  qui envoie  $g$  sur  $(\iota(g), 1, gg_{1,1}^{-1})$  et un morphisme  $\Pi \rtimes H \rightarrow H$  qui envoie  $(\alpha, h, g)$  sur  $h$ . D'où une suite exacte

$$1 \rightarrow \Pi \rightarrow \Pi \rtimes H \rightarrow H \rightarrow 1.$$

Si  $(U_i, u_i)_{i \in I}$  est un système projectif cofinal d'objet galoisiens pointés (et soit  $P$  l'objet correspondant de  $\text{pro-}\mathcal{C}$ ), on définit alors  $\mathcal{B}^{\text{temp}}(\mathcal{D}/\mathcal{C}, P)$  comme étant la catégorie  $\varinjlim \mathcal{D}'_{U_i}$ . Un isomorphisme de pro-objets  $P \rightarrow P'$  induit une équivalence  $\mathcal{B}^{\text{temp}}(\mathcal{D}/\mathcal{C}, P') \rightarrow \mathcal{B}^{\text{temp}}(\mathcal{D}/\mathcal{C}, P)$  et donc  $\mathcal{B}^{\text{temp}}(\mathcal{D}/\mathcal{C}, P)$  ne dépend du choix de  $(U_i)_i$  qu'à isomorphisme près. De plus si  $h \in G_i = \text{Gal}(U_i/e)$ , l'endofoncteur  $h^* : \mathcal{D}'_{U_i} \rightarrow \mathcal{D}'_{U_i}$  envoie  $T = (S_{U_i}, \psi_g)$  vers  $h^*T = (h^*S_{U_i}, \psi_{hg}\psi_h^{-1})$ . Alors  $\psi_h : S_{U_i} \rightarrow h^*S_{U_i}$  définit un isomorphisme  $T \rightarrow h^*T$  fonctoriellement en  $T$ . Donc  $h^* : \mathcal{D}'_{U_i} \rightarrow \mathcal{D}'_{U_i}$  est canoniquement isomorphe à l'identité de  $\mathcal{D}'_{U_i}$ . En particulier, tout isomorphisme du pro-objet  $P$  induit un endofoncteur de  $\mathcal{B}^{\text{temp}}(\mathcal{D}/\mathcal{C}, P)$  qui est canoniquement isomorphe à l'identité (fonctoriellement sur  $\text{Aut } P$ ).

Soit  $(F_i)_{i \in I}$  une famille de foncteurs fondamentaux  $F_i : \mathcal{D}_{U_i} \rightarrow \text{Ens}$  et supposons qu'on ait une famille  $(\alpha_f)_{f:U_i \rightarrow U_j}$ , indexée par l'ensemble des morphismes de  $I$ , d'isomorphismes de foncteurs  $F_i f^* \rightarrow F_j$  telle que pour tout  $U_i \xrightarrow{f} U_j \xrightarrow{g} U_k$ ,  $(\alpha_f \cdot g^*)\alpha_g = \alpha_{gf}$  (après avoir identifié  $(gf)^*$  et  $f^*g^*$  pour alléger les notations); une telle famille existe par exemple si  $I$  est simplement  $\mathbf{N}$ .

Alors, cela induit un système projectif  $(\Pi'_{U_i})_{i \in I}$  (unique à isomorphisme près indépendamment de  $(\alpha_f)$  si  $I = \mathbf{N}$  et les foncteurs  $\mathcal{D}'_{U_i} \rightarrow \mathcal{D}'_{U_j}$  sont pleinement fidèles). On peut alors définir

$$\pi_1^{\text{temp}}(\mathcal{D}/\mathcal{C}, (F_i)) = \varprojlim \Pi'_{U_i}$$

Supposons que l'on ait un diagramme 2-commutatif à flèches verticales fibrées :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_1 & \rightarrow & \mathcal{D}_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{C}_1 & \xrightarrow{f} & \mathcal{C}_2 \end{array}$$

tel que  $f : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$  soit exact, et  $\mathcal{D}_{1,U} \rightarrow \mathcal{D}_{2,f(U)}$  soit exact pour tout objet  $U$  de  $\mathcal{C}_1$ . On obtient alors un foncteur  $\mathcal{B}^{\text{temp}}(\mathcal{D}_1/\mathcal{C}_1) \rightarrow \mathcal{B}^{\text{temp}}(\mathcal{D}_2/\mathcal{C}_2)$ .

Par exemple, soient  $X$  une  $K$ -variété analytique lisse,  $\mathcal{C}$  la catégorie des revêtements étales finis de  $X$  et  $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  la catégorie fibrée telle que  $\mathcal{D}_U$  soit la catégorie des revêtements topologiques de  $U$ . Alors, puisque tout revêtement



étale fini est un morphisme de descente effectif pour les revêtements tempérés,  $\mathcal{D}'_U$  s'identifie fonctoriellement à la sous-catégorie pleine de  $\text{Cov}^{\text{temp}}(X)$  des revêtements tempérés  $S$  tels que  $S_U$  soit un revêtement topologique de  $U$ . Si  $(U_i, u_i)$  est un système cofinal de revêtements galoisiens pointés de  $(X, x)$ , alors  $\mathcal{B}^{\text{temp}}(\mathcal{C}/\mathcal{D})$  devient canoniquement équivalente à  $\text{Cov}^{\text{temp}}(X)$ .

Appliquons la construction catégorique du groupe fondamental tempéré à notre situation logarithmique.

Soit  $\underline{X} : X \rightarrow X_{l-1} \rightarrow \cdots \rightarrow \text{Spec}(k)$  une log fibration polystable, et supposons  $X$  connexe.

On a alors un foncteur  $C_{\text{top}} : \text{KCov}(X) \rightarrow \mathcal{K}\text{e}$  obtenu en composant le foncteur  $C$  de la proposition 5.1.6 avec le foncteur réalisation géométrique.

On peut définir une catégorie fibrée naturelle  $\mathcal{D}_{\text{top}} \rightarrow \text{KCov}(X)$  telle que la fibre en un revêtement két  $Y$  de  $X$  soit la catégorie des revêtements topologiques de  $C_{\text{top}}(Y)$  (qui est équivalente à  $\pi_1^{\text{top}}(C_{\text{top}}(Y))\text{-Ens}$ ).

On définit une catégorie fibrée  $\text{DD}_{\text{temp}} \rightarrow \text{KCov}(X)$  dont la fibre en un revêtement két  $f : Y \rightarrow X$  est la catégorie des données de descente de  $\mathcal{D}_{\text{top}} \rightarrow \text{KCov}(X)$  pour  $Y \rightarrow X$  (cela correspond heuristiquement aux revêtements “tempérés” de  $X$  qui deviennent topologiques après changement de base  $Y \rightarrow X$ ).

Soit  $x$  un point log géométrique de  $X$  et soit  $(Y, y)$  un revêtement két galoisien connexe log géométriquement pointé de  $(X, x)$ .

Soit  $\tilde{y} \rightarrow |C(Y)|$  la cellule fermée de  $|C(Y)|$  qui correspond à la strate de  $Y$  contenant  $y$ . Elle est contractile. Notons aussi  $\hat{y} \rightarrow \tilde{y} \rightarrow |C(Y)|$  la cellule ouverte, qui est aussi contractile. Alors on a un foncteur fondamental  $F_y : \mathcal{D}_{\text{top}_Y} \rightarrow \text{Ens}$  qui correspond au point base  $\tilde{y}$  ( $F_y(S)$  est l'ensemble des composantes connexes de  $S \times_{|C(Y)|} \hat{y}$ ). De plus, pour tout morphisme  $f : (Y', y') \rightarrow (Y, y)$ , les deux foncteurs  $F_{y'} f^*$  et  $F_y$  sont canoniquement isomorphes.

On peut alors considérer le foncteur  $F_{(Y, y)} : \text{DD}_{\text{temp}_Y} \rightarrow \text{Ens}$  qui associe à une donnée de descente  $T$  l'ensemble  $F_y(T_Y)$ .

Le foncteur induit

$$\text{DD}_{\text{temp}_Y} \rightarrow \text{Aut}(F_{(Y, y)})\text{-Ens}$$

est une équivalence de catégorie et d'après la proposition 5.1.8 l'on a une suite exacte :

$$1 \rightarrow \pi_1^{\text{top}}(|C(Y)|, \tilde{y}) \rightarrow \text{Aut}(F_{(Y, y)}) \rightarrow \text{Gal}(Y/X) \rightarrow 1.$$

**Définition 5.1.2.** Le groupe fondamental  $\mathbb{L}$ -tempéré du log schéma pluristable  $X$  en  $x$  est

$$\pi_1^{\text{temp}}(X, x)^{\mathbb{L}} := \varprojlim_{(Y, y)} \text{Aut}(F_{(Y, y)}),$$

où la limite projective est prise suivant la catégorie filtrante  $\mathbb{L}\text{-GalKCov}(X, x)$  des revêtements két galoisiens pointés  $\mathbb{L}$ -finis de  $(X, x)$ .

Si  $x_1 \rightarrow x_2$  est une spécialisation de points log géométriques de  $X$ , elle induit une équivalence naturelle entre la catégorie des revêtements pointés de  $(X, x_1)$  et la catégorie des revêtements pointés de  $(X, x_2)$  (on identifiera donc les deux catégories).

Si  $Y$  est un revêtement pointé  $(Y, y_1)$  de  $(X, x_1)$ , le revêtement pointé correspondant de  $(X, x_2)$  est  $(Y, y_2)$  où  $y_2$  est l'unique point log géométrique au-dessus de  $x_2$  tel qu'il existe une spécialisation  $y_1 \rightarrow y_2$  au-dessus de  $x_1 \rightarrow x_2$  (et cette

spécialisation est unique). Alors il existe une application canonique  $\tilde{y}_2 \rightarrow \tilde{y}_1$  telle que

$$\begin{array}{ccc} \tilde{y}_2 & \xrightarrow{\quad} & \tilde{y}_1 \\ & \searrow & \downarrow \\ & & |C(Y)| \end{array}$$

commute.

Cela induit un isomorphisme canonique  $F_{\tilde{y}_1} \simeq F_{\tilde{y}_2}$ , fonctoriel en  $Y$ , et l'on obtient donc un isomorphisme canonique  $\pi_1^{\text{temp}}(X, x_1)^{\mathbb{L}} \rightarrow \pi_1^{\text{temp}}(X, x_2)^{\mathbb{L}}$ . Si  $X$  est connexe et  $x_1, x_2$  sont deux points log géométriques de  $X$ , il existe une suite de spécialisations et de cospécialisations joignant  $x_1$  à  $x_2$ . Ainsi  $\pi_1^{\text{temp}}(X, x_1)^{\mathbb{L}}$  and  $\pi_1^{\text{temp}}(X, x_2)^{\mathbb{L}}$  sont nécessairement isomorphes.

On a une équivalence de catégories entre

$$\mathcal{B}^{\text{temp}, \mathbb{L}}_{(X, x)} = \varinjlim \text{DD}_{\text{temp}_Y} / \mathbb{L}\text{-GalKCov}(X, x)$$

et la catégorie  $\pi_1^{\text{temp}}(X, x)^{\mathbb{L}}$ -Ens des ensembles munis d'une action de  $\pi_1^{\text{temp}}(X, x)^{\mathbb{L}}$  qui se factorise à travers un quotient discret de  $\pi_1^{\text{temp}}(X, x)^{\mathbb{L}}$ .

Supposons maintenant que  $X$  est log géométriquement connexe, c'est-à-dire que  $X_{k'}$  est connexe pour toute extension két  $k'$  de  $k$ .

Soit  $\bar{k}$  un point log géométrique de  $k$ , soit  $\bar{x} = (\bar{x}_{k'})$  un système compatible de points log géométriques de  $X_{k'}$  où  $k'$  parcourt les extensions két de  $(k, \bar{k})$ . Par exemple, pour construire un tel système, on peut prendre un point géométrique de  $X_{\tilde{k}}$  où  $\tilde{k}$  est une clôture séparable stricte de  $k$ .  $\pi_1^{\log}(\tilde{k})$  est isomorphe à  $\text{Hom}(\overline{M}_{\tilde{k}}^{\text{gp}}, \hat{\mathbf{Z}}^{(p')})$  avec  $\overline{M}_{\tilde{k}}^{\text{gp}}$  de type fini, donc  $\pi_1^{\log}(\tilde{k})$  est topologiquement finiment engendré. On peut alors prendre un système dénombrable de revêtements pointés  $k_i$  de  $\tilde{k}$ , et choisir des points géométriques sur  $X_{k_i}$  par induction sur  $i$ . On définit alors  $\pi_1^{\text{temp-geom}}(X, \bar{x})^{\mathbb{L}} = \varprojlim_{k'} \pi_1^{\text{temp}}(X_{k'}, \bar{x}_{k'})^{\mathbb{L}}$ , où  $k'$  parcourt les extensions kummerienne de  $k$  dans un point log géométrique  $\bar{k}$ .

Soit  $\text{KCov}_{\text{géom}}(X) = \varinjlim \text{KCov}(X_{k'})$  où  $k'$  parcourt les extensions kummeriennes de  $k$  dans  $\bar{k}$ . C'est la catégorie des revêtements log géométriques de  $X$ . On obtient alors une catégorie fibrée  $\mathcal{D}_{\text{top-géom}} \rightarrow \text{KCov}_{\text{géom}}(X)$ , dont la fibre en  $Y$  est la catégorie des revêtements topologiques de  $|C_{\text{géom}}(Y)|$ .

Si  $Y \rightarrow X$  est un revêtement log géométrique, défini sur  $k'$ ,  $C_{\text{géom}}(Y_{k'})$  ne dépend pas de  $k'$ , et l'on obtient donc un foncteur  $\text{KCov}_{\text{géom}}(X) \rightarrow \mathcal{K}e$  qui envoie  $Y$  sur  $|C_{\text{géom}}(Y)|$ . Si  $\bar{x}$  est un système compatible de points, pour n'importe quel revêtement log géométriquement pointé  $(Y, \bar{y})$  de  $(X, \bar{x})$ ,  $\bar{y}$  définit un foncteur fondamental  $F_{\bar{y}}$  de  $\mathcal{D}_{\text{top-géom}_Y}$ . Pour tout morphisme  $(Y', \bar{y}') \rightarrow (Y, \bar{y})$ , les foncteurs correspondant sont canoniquement isomorphes.

Alors  $\pi_1^{\text{temp-geom}}(X, \bar{x})^{\mathbb{L}} = \pi_1^{\text{temp}}(\mathcal{D}_{\text{top-géom}} / \text{KCov}_{\text{géom}}(X), (F_{\bar{y}}))^{\mathbb{L}}$ .

## 5.2 Comparaison pour le groupe fondamental tempéré pro- $(p')$

Soit  $K$  un corps complet à valuation discrète. Soient  $O_K$  son anneau d'entiers,  $k$  sont corps résiduel.  $\text{Spec } O_K$  est muni de la log structure fs induite par

le monoïde  $O_K \setminus \{0\}$ .

Si  $\underline{X} : X \rightarrow \cdots \rightarrow \text{Spec}(O_K)$  est une log fibration polystable propre, on veut comparer le groupe fondamental tempéré de la fibre générique  $X_\eta$  (qui est lisse sur  $K$ ) avec le groupe fondamental tempéré de la fibre spéciale muni de sa log structure naturelle. La théorie de la spécialisation du groupe fondamental logarithmique nous donne déjà un foncteur de la catégorie des revêtements két de la fibre spéciale vers la catégorie des revêtements algébriques de la fibre générique. Pour étendre ceci aux groupes fondamentaux tempérés, on doit comparer, pour tout revêtement két  $T_s$  de la fibre spéciale, l'espace topologique  $C(T_s)$  avec l'espace de Berkovich du revêtement correspondant  $T_\eta$  de la fibre générique. Ainsi on définit, comme dans [7], une rétraction par déformation forte de  $T_\eta^{\text{an}}$  sur un sous-espace canoniquement homéomorphe à  $|C(T_s)|$ . Nous construirons cette rétraction localement pour la topologie étale, où  $T$  a un revêtement galoisien  $V'$  par une certaine log fibration au-dessus d'une extension modérément ramifiée de  $O_K$ . Alors la rétraction du tube de  $T_s$  est obtenue en descendant la rétraction du tube de  $V'_s$  définie dans [7]. Nous vérifierons alors que la rétraction ne dépend pas du choix de  $V'$ . Alors nous pourrions descendre la rétraction définie localement pour la topologie étale.

### 5.2.1 Squelette d'un log schéma két au-dessus d'un log schéma pluristable

Soit  $\underline{X} : X \rightarrow \cdots \rightarrow \text{Spec}(O_K)$  une log fibration polystable au-dessus de  $\text{Spec}(O_K)$ .

**Proposition 5.2.1.** *Soit  $T \rightarrow X$  un morphisme két. Notons  $\mathfrak{T}_\eta$  la fibre générique, au sens de Berkovich, du complété formel de  $T$  le long de sa fibre spéciale. Alors, il existe une application, fonctorielle en  $T$ ,  $|C(T)_s| \rightarrow \mathfrak{T}_\eta$ , qui identifie  $|C(T_s)|$  avec un sous-ensemble  $S(T)$  de  $\mathfrak{T}_\eta$  sur lequel  $\mathfrak{T}_\eta$  se rétracte par déformation forte.*

*Remarque.*  $\mathfrak{T}_\eta$  s'identifie naturellement à un domaine analytique de  $T^{\text{an}}$ , et si  $T$  est propre (par exemple si  $\underline{X}$  est propre et  $T$  est un revêtement két), alors  $\mathfrak{T}_\eta \rightarrow T^{\text{an}}$  est un isomorphisme.

*Démonstration.* Soit  $f : T \rightarrow X$  un morphisme két.

Pour tout  $x \in T_s$ , soit  $\underline{U} : U_l \rightarrow \cdots \rightarrow U_0$  une fibration polystable étale au dessus de  $\underline{X}$  telle que  $(U_l, x_l)$  soit un voisinage étale de  $f(x)$ , et, pour tout  $i$ ,  $U_i$  ait une carte exacte  $P_i \rightarrow A_i$  et des morphismes compatibles  $P_i \rightarrow P_{i+1}$  tels que le morphisme induit  $U_{i+1} \rightarrow U_i \times_{\text{Spec } \mathbf{Z}[P_i]} \text{Spec } \mathbf{Z}[P_{i+1}]$  soit étale strict. On a un voisinage étale  $i : (V, x') \rightarrow (T, x)$  de  $x$ , un morphisme  $(p')$ -Kummer  $P_l \rightarrow Q$  tel que  $V \rightarrow X$  se factorise à travers un morphisme strict étale  $V \rightarrow U_l \times_{\text{Spec } \mathbf{Z}[P_l]} \text{Spec } \mathbf{Z}[Q]$ .

Soit  $P_i \rightarrow \frac{1}{n}P_i$  l'injection canonique. Alors, par définition d'un morphisme  $(p')$ -kummerien, il existe  $n$  premier à  $p$  tel que  $P_l \rightarrow \frac{1}{n}P_l$  se factorise à travers  $P_l \rightarrow Q$ . Alors  $V$  a un revêtement galoisien két  $V'$  qui provient d'une fibration polystable  $\underline{U}' = V' \rightarrow U'_{l-1} \rightarrow \cdots \rightarrow \text{Spec } O_{K'}$ , où  $U'_i = U_i \times_{\text{Spec } \mathbf{Z}[P_i]} \text{Spec } \mathbf{Z}[\frac{1}{n}P_i]$  pour  $i \leq l$  et  $V' = V \times_{\mathbf{Z}[Q]} \mathbf{Z}[\frac{1}{n}P]$  (d'où un morphisme étale strict  $V' \rightarrow U'_l$ ) sur  $O_{K'}$  pour une certaine extension modérément ramifiée

$K' = K[\pi^{1/n}]$  de  $K$ . Appelons  $G = (\frac{1}{n}P^{\text{gp}}/Q^{\text{gp}})^{\vee}$  le groupe de Galois de ce revêtement két.

Notons  $\mathfrak{U}, \mathfrak{U}_i, \mathfrak{V}, \mathfrak{V}'$  les complétés formels de  $U, U_i, V, V'$  le long de la fibre spéciale. Notons alors  $\mathfrak{V}_\eta$  la fibre générique de  $\mathfrak{V}$  au sens de Berkovich. La rétraction de  $\mathfrak{V}'_\eta$  définie dans le théorème 1.4.5 est  $G$ -équivariante, donc définit une rétraction de  $\mathfrak{V}_\eta$ .

Soit  $S(\ )$  l'image de la rétraction de  $(\ )_\eta$ . Alors on a un isomorphisme naturel  $S(\mathfrak{V}_\eta) = G \backslash S(\mathfrak{V}'_\eta) \simeq G \backslash |C(V'_s)| = |G \backslash C(V'_s)| = |C(V_s)|$  (corollaire 1.4.6).

Montrons que la rétraction de  $\mathfrak{U}_\eta$  que l'on vient de définir ne dépend pas de  $n$ . Commençons par le cas d'un morphisme polystable.

Soit

$$\psi : Z_1 = \text{Spec } A[P]/(p_i - \lambda_i) \rightarrow Z_2 = \text{Spec } A[P]/(p_i - \lambda_i^s)$$

où  $P = \mathbf{N}^{\text{r}} = \bigoplus_{(i,j) \in \mathbf{r}} \mathbf{N}e_{ij}$  et  $p_i = \sum_j e_{ij}$  induit par la multiplication par  $s$  sur  $P$ , où  $s$  est un entier premier à  $p$  et où  $\lambda \in A$ .

Soit  $\mathfrak{G} = \prod_i \mathfrak{G}_m^{(r_i)}$  où  $\mathfrak{G}_m^{(r_i)}$  est le noyau de la multiplication  $\mathfrak{G}_m^{r_i+1} \rightarrow \mathfrak{G}_m$ .  $\mathfrak{G}$  agit sur  $\mathfrak{Z}_1$  et  $\mathfrak{Z}_2$ . On a  $\psi(g \cdot x) = g^s \cdot \psi(x)$ .

Soit  $T_{ij}$  les coordonnées de  $G = \mathfrak{G}_\eta$ . Alors  $|T_{ij}^s - 1| = |T_{ij} - 1|$  si  $|T_{ij} - 1| < 1$  car  $s$  est premier à  $p$ . Ainsi pour  $t < 1$ ,  $(\ )^s : G \rightarrow G$  induit un isomorphisme  $(\ )^s : G_t \rightarrow G_t$ , et  $g_t^s = g_t$  (où  $G_t$  est le sous-groupe de  $G$  défini par les inégalités  $|T_{ij} - 1| < t$  et  $g_t$  est son point maximal; cf § 1.4).

Donc si  $t < 1$  (et aussi pour  $t = 1$  par continuité),

$$\psi(x_t) = \psi(g_t \cdot x) = g_t^s \cdot \psi(x) = g_t \cdot \psi(x) = \psi(x)_t,$$

où  $*$  est la multiplication déjà utilisée dans la discussion suivant le théorème 1.4.5. De plus le diagramme naturel d'homéomorphismes :

$$\begin{array}{ccc} S(\mathfrak{Z}_1) & \rightarrow & |C(Z_{1,s})| \\ \downarrow & & \downarrow \\ S(\mathfrak{Z}_2) & \rightarrow & |C(Z_{2,s})| \end{array}$$

est commutatif.

Pour une fibration polystable standard, on obtient le même résultat par récurrence sur la longueur, en utilisant que  $\psi_n(r_i, t)^{1/s} = \psi_n(r_i^{1/s}, t^{1/s})$  (revoir la discussion suivant 1.4.5 pour les notations).

Plus précisément, supposons qu'on ait le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} B = B'[Y_{ij}]/(Y_{i0} \cdots Y_{in_i} - b_i) & \longleftarrow & B' \\ \uparrow \phi & & \uparrow \phi' \\ A = A'[X_{ij}]/(X_{i0} \cdots X_{in_i} - a_i) & \longleftarrow & A' \end{array}$$

où  $\phi(X_{ij}) = Y_{ij}^s$  et donc  $\phi'(a_i) = b_i^s$ , et  $\tilde{\phi}' := \text{Spf } \phi' : \text{Spf } B' \rightarrow \text{Spf } A'$  est un morphisme két de log fibrations polystables et supposons par récurrence que l'on sache déjà que  $\tilde{\phi}(x_t) = \tilde{\phi}(x)_t$ .

Notons  $\text{Spf } A$  (resp.  $\text{Spf } A'$ ,  $\text{Spf } B$ ,  $\text{Spf } B'$ )  $\mathfrak{X}$  (resp.  $\mathfrak{X}'$ ,  $\mathfrak{Y}$ ,  $\mathfrak{Y}'$ ).

La première partie de la rétraction de  $\mathfrak{X}_\eta^{\text{an}}$  et  $\mathfrak{Y}_\eta^{\text{an}}$  (consistant en la rétraction

fibre par fibre) commute avec  $\tilde{\phi} := \text{Spf } \phi$  d'après le cas précédent. Nous avons donc juste à étudier la deuxième partie de la rétraction.

$\tilde{\phi}$  induit une application :

$$\begin{array}{ccc} S_A & = & \{(x, r_{ij}) \in (\mathfrak{X}'_\eta)^{\text{an}} \times [0, 1]^{[\mathbf{n}]} | r_{i0} \cdots r_{in_i} = |a_i(x)|\} \subset \mathfrak{X}_\eta^{\text{an}} \\ \downarrow & & \\ S_B & = & \{(y, r_{ij}) \in (\mathfrak{Y}'_\eta)^{\text{an}} \times [0, 1]^{[\mathbf{n}]} | r_{i0} \cdots r_{in_i} = |b_i(y)|\} \subset \mathfrak{Y}_\eta^{\text{an}} \end{array}$$

qui envoie  $(x, r_{ij})$  en  $(\tilde{\phi}'(x), r_{ij}^{1/s})$  (remarquons que  $|a_i(x)| = |b_i(\tilde{\phi}'(x))|^s$ ).

Alors, si  $(x, r_{ij}) \in S_A$  (notons  $y := \tilde{\phi}'(x)$  ; par hypothèse de récurrence,  $\tilde{\phi}'(x_t) = y_t$ )

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}((x, r_{ij})_t) &= \tilde{\phi}((x_t, \psi_{n_i}(r_{ij}, |a_i(x_t)|)_k)) \\ &= (y_t, \psi_{n_i}(r_{ij}, |a_i(x_t)|)_k^{1/s}) \\ &= (y_t, \psi_{n_i}(r_{ij}^{1/s}, |a_i(x_t)|^{1/s})_k) \\ &= (y_t, \psi_{n_i}(r_{ij}^{1/s}, |b_i(y_t)|)_k) \\ &= (y, r_{ij}^{1/s})_t \\ &= \tilde{\phi}(x, r_{ij})_t \end{aligned}$$

Si maintenant on a un diagramme de log schémas polystables :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & X' \\ \downarrow f & & \downarrow f' \\ Y & \xrightarrow{g'} & Y' \end{array}$$

où  $g, g'$  sont étales,  $f, f'$  sont két, et l'on sait déjà que  $f'$  commute avec les déformations fortes de  $X'$  et  $Y'$ . Montrons-le pour  $f$ . Soit  $x \in \mathfrak{X}_\eta$ . Alors  $g'f(x_t) = f'g(x_t) = (f'g(x))_t = (g'f(x))_t = g'(f(x)_t)$ . Soit  $S_t := \{y \in \mathfrak{Y}_\eta | g'(y) = g'f(x_{t'})\}$ ,  $t' \in [0, t]\} = g'^{-1}(\{(g'f(x))_{t'}\}_{t' \in [0, t]})$ . Alors, la déformation de  $Y$  induit par restriction une déformation forte de  $S_t$  sur  $g'^{-1}((g'f(x))_t)$  (qui est discret) grâce à 1.4.5.(ii). En particulier toute composante connexe de  $S_t$  contient un unique élément de  $g'^{-1}((g'f(x))_t)$ . Or  $t' \mapsto f(x_{t'})$  et  $t' \mapsto f(x)_{t'}$  sont deux fonctions continues de  $[0, t]$  dans  $S_t$  et qui coïncident en 0. Comme  $[0, t]$  est connexe elles ont leurs images dans une même composante connexe et donc  $f(x_t) = f(x)_t$ .

Donc  $f$  commute bien aussi à la déformation forte. Il est clair que  $f$  commute aussi aux homéomorphismes  $S(\mathfrak{X}) \rightarrow |C(X_s)|$  et  $S(\mathfrak{Y}) \rightarrow |C(Y_s)|$ . En effet si  $x \in S(\mathfrak{X})$ , les deux images de  $x$  dans  $|C(Y_s)|$  par les deux morphismes sont au-dessus du même point de  $|C(Y'_s)|$ , donc sont soit égaux, soit dans des strates différentes de  $|C(Y_s)|$ . Mais dans les deux cas, l'image de  $x$  est dans la strate de  $|C(Y_s)|$  correspondant à la strate de  $Y_s$  dans laquelle se trouve  $\pi(g'f(x))$ . Par descente étale, tout morphisme két de fibration polystable commute à la déformation forte et à l'homéomorphisme entre squelette et réalisation géométrique du complexe polysimplicial.

On en déduit en particulier que la déformation forte de  $\mathfrak{U}_\eta$  et l'isomorphisme  $S(\mathfrak{U}) \rightarrow |C(U_s)|$  ne dépendent pas de  $n$ .

Soit  $i : W \rightarrow T$  un autre voisinage de  $x$  satisfaisant les mêmes propriétés que  $V$ , et  $W'$  défini de la même façon (on peut supposer grâce à la remarque

précédente que l'on a choisi le même  $n$ ). Ainsi,  $W'' = V' \times_T W'$  est étale sur  $V'$  et  $W'$  (les projections canoniques sont notées  $p$  et  $p'$ ).

Soit  $y \in \mathfrak{V}'_\eta$  et  $y' \in \mathfrak{W}'_\eta$  ayant même image dans  $\mathfrak{T}_\eta$ . Soit  $y'' \in \mathfrak{W}''_\eta$  au-dessus de  $y$  et  $y'$ . Alors, pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $i(y_t) = i(p(\phi(y''))_t) = i(p(\phi(y'')_t))$  par définition de la rétraction de  $\mathfrak{W}_\eta$ . En appliquant encore le théorème 1.4.5.(ii) à  $\phi$ , on obtient  $i(y_t) = ip\phi(y''_t)$ . Par le même argument appliqué à  $U'$  et puisque  $ip\phi = i'p'\phi'$ , on obtient  $i(y_t) = i'(y'_t)$ . Ainsi, les rétractions des différents  $\mathfrak{V}_\eta$  sont compatibles et on obtient une rétraction bien définie de  $\mathfrak{T}_\eta$  (si  $(V_i)$  est un recouvrement étale de  $T$ , la fonction obtenue en recollant les déformations des différents  $\mathfrak{V}_{i,\eta}$  est continue puisque  $\coprod \mathfrak{V}_{i,\eta} \rightarrow \mathfrak{T}_\eta$  est quasi-étale et surjectif et donc c'est un quotient topologique).

De plus, si  $\phi : T_1 \rightarrow T_2$  est un morphisme két,  $\phi(x_t) = \phi(x)_t$ . Comme dans le théorème 1.4.5.(vi),  $\phi$  est aussi compatible aux extensions isométriques de  $K$ .

Si  $T$  est recouvert par  $\tilde{V} = \bigcup_i V_i$  tel que tout  $V_i$  satisfait aux mêmes propriétés que  $V$ , on obtient un isomorphisme

$$S(\mathfrak{T}_\eta) = \text{Coker}(S(\tilde{\mathfrak{V}} \times_{\tilde{\mathfrak{T}}} \tilde{\mathfrak{W}}_\eta \rightrightarrows \tilde{\mathfrak{V}})) = \text{Coker}\left(\bigcup_{i,j} |C(V_{i,s} \times_{T_s} V_{j,s})| \rightrightarrows \bigcup_i |C(V_{i,s})| \right) = |C(T_s)|$$

Cet isomorphisme ne dépend pas du choix de  $\tilde{V}$ , et est fonctoriel en  $T$ .  $\square$

*Remarque.* En fait, la même preuve permet de construire une déformation forte de  $\mathfrak{T}_{O_{K'},\eta}$  pour n'importe quelle extension isométrique de  $K$  (même à valuation non discrète), fonctoriellement en  $K'$ . Si  $K'$  contient une clôture séparable de  $K$  (et même une extension maximale modérément ramifiée), alors  $S(T_{O_{K'}})$  est fonctoriellement homéomorphe à  $C_{\text{géom}}(T/k)$ .

## 5.2.2 Théorème de comparaison des groupes fondamentaux tempérés

Soit  $K$  un corps complet à valuation discrète. Soit  $p$  la caractéristique résiduelle (qui peut éventuellement être 0).

Soit  $\underline{X} : X \rightarrow \cdots \rightarrow \text{Spec}(O_K)$  une log fibration polystable sur  $\text{Spec}(O_K)$ .

Comparons le groupe fondamental tempéré de la fibre générique, en tant que  $K$ -variété lisse, et le groupe fondamental tempéré de sa fibre spéciale logarithmique comme défini en §5.1.3.

**Théorème 5.2.2.** *Soit  $\bar{x}$  un point géométrique de  $X_\eta^{\text{an}}$ , et soit  $\tilde{x}$  sa log réduction. On a un morphisme  $\pi_1^{\text{temp}}(X_\eta^{\text{an}}, \bar{x})^{\mathbb{L}} \rightarrow \pi_1^{\text{temp}}(X_s, \tilde{x})^{\mathbb{L}}$  qui est un isomorphisme si  $p \notin \mathbb{L}$ .*

Cet isomorphisme est compatible avec les extensions finies de  $K$ .

*Démonstration.* On a les deux foncteurs exacts suivants :

$$\mathbb{L}\text{-KCov}(X) \rightarrow \mathbb{L}\text{-Cov}^{\text{alg}}(X_\eta),$$

qui est une équivalence de catégorie si  $p \notin \mathbb{L}$ , et

$$\mathbb{L}\text{-KCov}(X) \rightarrow \mathbb{L}\text{-KCov}(X_s)$$

qui est une équivalence de catégories (théorème 1.3.1).

Cela nous donne un foncteur exact de  $\mathbb{L}\text{-KCov}(X_s)$  vers  $\mathbb{L}\text{-Cov}^{\text{alg}}(X_\eta)$ , qui est une équivalence de catégories si  $p \notin \mathbb{L}$ .

On a une catégorie fibrée  $\mathcal{D}_{\text{top}}^{\text{an}}(X)$  sur  $\mathbb{L}\text{-KCov}(X)$  dont la fibre en un revêtement két  $\mathbb{L}$ -fini  $T$  est la catégorie des revêtements topologiques de  $T_\eta^{\text{an}}$ . On a aussi une catégorie fibrée  $\mathcal{D}_{\text{top}}^{\text{sp}}(X)$  sur  $\mathbb{L}\text{-KCov}(X)$  obtenue par pull-back de la catégorie fibrée  $\mathcal{D}_{\text{top}}(X_s) \rightarrow \mathbb{L}\text{-KCov}(X_s)$  définie en 5.1.3 le long de  $\mathbb{L}\text{-KCov}(X) \rightarrow \mathbb{L}\text{-KCov}(X_s)$ .

La proposition 5.2.1 induit une équivalence de catégories fibrées  $\mathcal{D}_{\text{top}}^{\text{an}}(X) \rightarrow \mathcal{D}_{\text{top}}^{\text{sp}}(X)$ .

Mais  $\mathbb{L}\text{-KCov}(X) \rightarrow \mathbb{L}\text{-Cov}^{\text{alg}}(X_\eta)$  induit un morphisme

$$\pi_1^{\text{temp}}(X_\eta^{\text{an}})^{\mathbb{L}} \rightarrow \pi_1^{\text{temp}}(\mathcal{D}_{\text{top}}^{\text{an}}(X)/\mathbb{L}\text{-KCov}(X))$$

qui est un isomorphisme si  $p \notin \mathbb{L}$ .

De même,  $\mathbb{L}\text{-KCov}(X) \rightarrow \mathbb{L}\text{-KCov}(X_s)$  induit un isomorphisme

$$\pi_1^{\text{temp}}(X_s)^{\mathbb{L}} \rightarrow \pi_1^{\text{temp}}(\mathcal{D}_{\text{top}}^{\text{sp}}(X)/\mathbb{L}\text{-KCov}(X)).$$

□

### 5.2.3 Théorème de comparaison des groupes fondamentaux tempérés géométriques

**Théorème 5.2.3.** *Il existe un morphisme naturel*

$$\pi_1^{\text{temp}}(X_{\bar{\eta}})^{\mathbb{L}} \rightarrow \pi_1^{\text{temp-geom}}(X_s)^{\mathbb{L}},$$

qui est un isomorphisme si  $p \notin \mathbb{L}$ .

*Démonstration.* On a un foncteur  $\text{KCov}(s) \rightarrow \text{Cov}^{\text{alg}}(K)$ . En prenant la limite projective des morphismes du théorème 5.2.2, on obtient un morphisme

$$\pi_1^{\text{temp}}(X_{\bar{\eta}})^{\mathbb{L}} = \varprojlim_{K'} \pi_1^{\text{temp}}(X_{K'})^{\mathbb{L}} \rightarrow \varprojlim_{s'} \pi_1^{\text{temp}}(X_{s'})^{\mathbb{L}} = \pi_1^{\text{temp-geom}}(X_s)^{\mathbb{L}}.$$

Pour montrer que c'est un isomorphisme si  $p \notin \mathbb{L}$ , compte tenu des isomorphismes de 5.2.2, il suffit de montrer que  $\pi_1^{\text{temp}}(X_{\bar{\eta}})^{\mathbb{L}} = \varprojlim_{K'} \pi_1^{\text{temp}}(X_{K'})^{\mathbb{L}}$  où  $K'$  décrit les extensions modérément ramifiées de  $K$  (et non plus toutes les extensions séparable de  $K$ ). D'après [27, prop. 1.15], un revêtement  $\mathbb{L}$ -fini  $T_{\bar{\eta}}$  de  $X_{\bar{\eta}}$  est défini sur une extension modérément ramifiée  $K'$  de  $K$ , et se prolonge donc en un revêtement két  $T$  de  $X_{O_{K'}}$ . On sait qu'il existe une extension két  $s''$  de  $s'$  (c'est-à-dire une extension modérément ramifiée  $K''$  de  $K'$ ), telle que pour toute extension  $K'''$  de  $K''$ ,  $C(T_{s'''}) \rightarrow C(T_{s''})$  est un isomorphisme. On déduit de 5.2.1 que  $T_{K'''}^{\text{an}} \rightarrow T_{K''}^{\text{an}}$  est une équivalence d'homotopie.

On en déduit que  $\pi_1^{\text{temp}}(X_{\bar{\eta}})^{\mathbb{L}} \rightarrow \varprojlim_{K_i} \pi_1^{\text{temp}}(X_{K_i})^{\mathbb{L}}$ , où  $K_i$  décrit les extensions

modérément ramifiées de  $K$  dans  $\bar{K}$  est un isomorphisme.

On obtient donc l'isomorphisme voulu en prenant la limite projective des isomorphismes du théorème 5.2.2.  $\square$

Cet isomorphisme est  $\text{Gal}(\bar{K}, K)$ -équivariant (puisque l'isomorphisme pour chaque extension galoisienne  $K_i$  de  $K$  est  $\text{Gal}(K_i/K)$ -équivariante).

*Remarque.* Nous pourrions aussi construire l'isomorphisme en prenant la limite projective sur toutes les extensions séparables de  $K$  en remarquant que si  $K_1 \rightarrow K_2$  est totalement sauvagement ramifié, le morphisme de log points  $s_2 \rightarrow s_1$  est  $k$  et donc  $\pi_1^{\text{temp}}(X_{s_2}) \rightarrow \pi_1^{\text{temp}}(X_{s_1})$  est un isomorphisme.

## 5.3 Complexes classifiants associés et groupe fondamental algébrique de la fibre spéciale

Dans cette section, nous associons à un log-schéma pluristable un complexe classifiant dont le groupe fondamental tempéré est le groupe fondamental tempéré du log-schéma de la définition 5.1.2.

### 5.3.1 Complexe classifiant des strates

Soit  $S$  un log point fs, et soit  $k$  son corps sous-jacent.

Soit  $X \rightarrow S$  un morphisme strictement plurinodal de log schémas.

Soit  $Y$  l'union disjointe des adhérences des strates de  $X$  (chaque adhérence de strate étant muni de la structure de sous-log-schéma réduit et strict de  $X$ ). Soit  $C(Y/X)$  le log-schéma simplicial dont la composante de degré  $n$  est  $Y^n = Y \times_X \cdots \times_X Y$  (les morphismes de log-schémas étant tous stricts ici, la formation des produits fibrés commute à la prise du schéma sous-jacent) et les flèches sont évidentes. On obtient alors un ensemble simplicial  $\pi_0(C(Y/X))$  en prenant en chaque degré les composantes connexes de  $Y^n$ . Remarquons que les composantes connexes de  $Y^n$  s'identifient à des adhérences de strates de  $X$ , ce qui donne un foncteur  $(\Delta / \pi_0(C(Y/X)))^{\text{op}} \rightarrow \text{Str } X$ .

Considérons donc le complexe classifiant  $\mathcal{G}_{\text{Str}}(X)$  sur  $(\text{Str } X)^{\text{op}}$  dont la fibre en une strate  $x$  est la catégorie des revêtements két de l'adhérence de la strate  $\overline{\{x\}}$ . On a alors un foncteur naturel  $\text{KCov } X \rightarrow \mathcal{B}^{\text{alg}}(\mathcal{G}_{\text{Str}} X)$  qui, pour tout objet  $x$  de  $(\text{Str } X)^{\text{op}}$ , associe à un revêtement de  $X$  sa restriction à  $\overline{\{x\}}$ .

On obtient donc un complexe classifiant  $\mathcal{G}_{\text{DD}}(X)$  sur  $(\Delta / \pi_0(C(Y/X)))^{\text{op}}$  par pullback. Si on tronque le complexe classifiant à l'ordre 3, on a par définition une équivalence entre les données de descentes de  $Y/X$  et les revêtements de ce dernier complexe classifiant (il n'est évidemment pas nécessaire de tronquer à l'ordre 2 pour obtenir la même catégorie).

Or, d'après [38, prop. 3.2.18], le morphisme  $Y \rightarrow X$  étant un épimorphisme propre, c'est un morphisme de descente effectif (dans la catégorie des fs log-schémas) pour les revêtements két. On a donc une équivalence de catégories entre les revêtements két de  $X$  modérément ramifiés et les revêtements két de  $Y$  munis de données de descentes.



Le foncteur composé  $\mathrm{KCov}(X) \rightarrow \mathcal{B}^{\mathrm{alg}}(\mathcal{G}_{\mathrm{Str}}(X)) \rightarrow \mathcal{B}^{\mathrm{alg}}(\mathcal{G}_{\mathrm{DD}}(X))$  est une équivalence de catégories.

Pour montrer que  $\mathrm{KCov}(X) \rightarrow \mathcal{B}^{\mathrm{alg}}(\mathcal{G}_{\mathrm{Str}}(X))$  est aussi une équivalence de catégories, il suffit donc de montrer que  $\mathcal{B}^{\mathrm{alg}}(\mathcal{G}_{\mathrm{Str}}(X)) \rightarrow \mathcal{B}^{\mathrm{alg}}(\mathcal{G}_{\mathrm{DD}}(X))$  est pleinement fidèle. Mais pour cela il suffit d'appliquer la proposition 4.5.1.(ii) à  $F : (\Delta / \pi_0(C(Y/X)))^{\mathrm{op}} \rightarrow \mathrm{Str}(X)$ .

En effet, soit  $x$  un objet de  $\mathrm{Str}(X)$  (c'est-à-dire une strate de  $X$ ),  $x \downarrow F$  est la sous-catégorie pleine de  $(\Delta / \pi_0(C(Y/X)))^{\mathrm{op}}$  constituée des objets  $y$  tels que  $x \subset \overline{F(y)}$ . Tout objet  $y$  de cette catégorie admet une flèche vers un objet de  $\pi_0(C(Y/X))_1$ , correspondant à une composante irréductible  $Y_1$  de  $X$  contenant  $x$ . Mais si  $Y_1$  et  $Y_2$  sont deux telles composantes irréductibles de  $X$ , soit  $Y_{12}$  la composante connexe de  $Y_1 \cap Y_2$  qui contient  $x$  et notons aussi  $Y_{12}$  l'objet correspondant de  $(\Delta / \pi_0(C(Y/X)))^{\mathrm{op}}$ , qui est aussi dans  $x \downarrow F$ .

On a donc dans  $x \downarrow F$  le diagramme suivant :

$$Y_1 \leftarrow Y_{12} \rightarrow Y_2,$$

ce qui montre que  $x \downarrow F$  est bien connexe, et donc  $\mathrm{KCov}(X) \rightarrow \mathcal{B}^{\mathrm{alg}}(\mathcal{G}_{\mathrm{Str}}(X))$  est bien une équivalence de catégories.

### 5.3.2 Complexe classifiant polysimplicial d'un schéma strictement polystable

Si  $\underline{X}$  est une fibration strictement polystable, d'espace global  $X$ , on a aussi un foncteur  $F : (\Lambda / \mathbf{C}(\underline{X}))^{\mathrm{op}} \rightarrow (\mathrm{Str} X)^{\mathrm{op}}$  qui induit donc par pullback de  $\mathcal{G}_{\mathrm{Str}}(X)$  un complexe classifiant  $\mathcal{G}_{\mathbf{C}}(\underline{X})$  sur  $(\Lambda / \mathbf{C}(\underline{X}))^{\mathrm{op}}$ .

Si  $X$  est strictement polystable,  $\mathbf{C}(X)$  est un complexe polysimplicial libre. Donc si  $x$  est une strate de  $X_s$ , soit  $y$  un polysimplexe nondégénéré de  $\mathbf{C}(X)$  correspondant à  $x$ , alors  $x \downarrow F$  est la sous-catégorie pleine de  $(\Lambda / \mathbf{C}(\underline{X}))^{\mathrm{op}}$  constituée des objets qui sont l'image d'un morphisme de source  $y$ , qui est équivalente à  $(\Lambda / [\mathbf{n}_y])^{\mathrm{op}}$  car  $\mathbf{C}(X)$  est libre. Or  $\Lambda / [\mathbf{n}_y]$  admet un objet final, donc on peut directement appliquer 4.5.1.(iii) à  $(\Lambda / \mathbf{C}(\underline{X}))^{\mathrm{op}} \rightarrow (\mathrm{Str} X_s)^{\mathrm{op}}$ , et donc  $\mathcal{B}^{\mathrm{alg}}(\mathcal{G}_{\mathrm{Str}}(X)) \rightarrow \mathcal{B}^{\mathrm{alg}}(\mathcal{G}_{\mathbf{C}}(\underline{X}))$  est une équivalence de catégories.

### 5.3.3 Complexe classifiant $l$ -polysimplicial d'une fibration strictement polystable

Pour une fibration polystable  $\underline{X}$  de longueur  $l$ , on peut construire un objet  $l$ -polysimplicial  $C(\underline{X})$  de  $(\Lambda^l)^{\circ} \mathrm{Ens}$  tel que l'image de  $C(\underline{X})$  par le foncteur  $\square^{l-1}(\Lambda^l) \circ \mathrm{Ens} \rightarrow \Lambda^{\circ} \mathrm{Ens}$ , qui prolonge en commutant aux limites directes  $\square^{l-1} : \Lambda^l \rightarrow \Lambda$ , qui à  $[\mathbf{n}_1] \times \cdots \times [\mathbf{n}_l]$  associe  $[\mathbf{n}_1] \square \cdots \square [\mathbf{n}_l]$ , est  $\mathbf{C}(\underline{X})$  (en particulier, on a un foncteur  $D_0 : \Lambda^l / C(\underline{X}_s) \rightarrow \Lambda / \mathbf{C}(\underline{X})$ ).

Supposons  $C(\underline{X})$  déjà construit pour les fibrations de longueur  $l$ , et soit  $\underline{X} = (X_{l+1} \rightarrow \underline{X}_l)$  une fibration de longueur  $l+1$ . Considérons le foncteur :

$$D' : (\Lambda^l / C(\underline{X}_l))^{\mathrm{op}} \xrightarrow{D_0^{\mathrm{op}}} (\Lambda / \mathbf{C}(\underline{X}_l))^{\mathrm{op}} \xrightarrow{D} \Lambda^{\circ} \mathrm{Ens}.$$

On peut lui associer l'objet  $C(\underline{X}_l) \times D'$  dont l'ensemble des objets en  $([\mathbf{n}_1], \dots, [\mathbf{n}_{l+1}])$  est

$$\coprod_{x \in C(\underline{X}_l)_{[\mathbf{n}_1] \times \dots \times [\mathbf{n}_l]}} (D'_x)_{[\mathbf{n}_{l+1}]}$$

L'image directe par  $\square^{l-1} \times \text{id}_{\mathbf{A}} : \mathbf{A}^{l+1} \rightarrow \mathbf{A} \times \mathbf{A}$  est  $C(\underline{X}_l) \times D$  par hypothèse de récurrence, et on vérifie facilement que l'image directe par  $\mathbf{A} \times \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}$  de  $C \times D$  est  $C \square D$ .

Par pullback de  $\mathcal{G}_C(\underline{X})$  le long de  $D_0^{\text{op}}$ , on en déduit un complexe classifiant  $\mathcal{G}_C(\underline{X})/(\mathbf{A}^l/C(\underline{X}_l))^{\text{op}}$ .

De même qu'on avait associé à un morphisme két  $S \rightarrow X_l$  un ensemble polysimplicial  $C(S)$ , on peut construire un ensemble  $l$ -polysimplicial  $C(S)$  tel que  $\square^{l-1}C(S) = C(S)$ .

Montrons par récurrence sur la longueur de  $\underline{X}$  que la conclusion de 4.5.1.iii est vraie pour  $(\mathbf{A}^l/C(\underline{X}))^{\text{op}} \rightarrow (\text{Str } X)^{\text{op}}$ . Supposons-la vraie pour  $\underline{X}_l$  et montrons-la pour  $\underline{X} = (X_{l+1} \rightarrow \underline{X}_l)$ .

On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} (\mathbf{A}^{l+1}/C(\underline{X}))^{\text{op}} & \longrightarrow & \text{Str}(X_{l+1})^{\text{op}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathbf{A}^l/C(\underline{X}_l))^{\text{op}} & \longrightarrow & \text{Str}(X_l)^{\text{op}} \end{array}$$

où les flèches verticales sont cofibrantes. La flèche du bas vérifie la conclusion de 4.5.1.(iii), et les fibres aussi d'après le cas où  $X$  est strictement polystable (car si  $x$  est un objet de  $C(\underline{X}_l)$ ,  $(\mathbf{A}^{l+1}/C(\underline{X}))_x^{\text{op}} \rightarrow (\text{Str } X)_x^{\text{op}}$  s'identifie à  $(\mathbf{A}^l/C((X_{l+1})_x))^{\text{op}} \rightarrow (\text{Str}(X_{l+1})_x)^{\text{op}}$  par définition de  $C(\underline{X})$ ).

Donc la conclusion de 4.5.1.(iii) est aussi vraie pour  $(\mathbf{A}^{l+1}/C(\underline{X}))^{\text{op}} \rightarrow (\text{Str } X)^{\text{op}}$ .

Donc

$$\text{KCov}(X) \rightarrow \mathcal{B}^{\text{alg}}(\mathcal{G}_C(\underline{X}))$$

est une équivalence de catégories.

### 5.3.4 Descente et complexe classifiant $l$ -polysimplicial d'une fibration polystable

Soit  $\underline{X}$  une  $l$ -fibration polystable sur  $S$ . Soit  $\underline{X}' \rightarrow \underline{X}$  un morphisme étale surjectif de  $l$ -fibrations polystables avec  $\underline{X}'$  strictement polystable. Notons  $\underline{X}'^{(n)} = \underline{X}' \times_{\underline{X}} \dots \times_{\underline{X}} \underline{X}'$ .

Alors  $C(\underline{X}) = \text{Coker}(C(\underline{X}'^{(2)}) \rightrightarrows C(\underline{X}'))$  ne dépend pas du choix de  $\underline{X}'$ .

Le foncteur  $(\mathbf{A}^l/C(\underline{X}'^{(n)}))^{\text{op}} \rightarrow (\mathbf{A}^l/C(\underline{X}))^{\text{op}}$  est en fait une catégorie cofibrée en catégories discrètes, et en recollant les  $\underline{X}'^{(n)}$  pour  $n \geq 1$ , on obtient ainsi une catégorie cofibrée  $\mathcal{C}_{\text{DD}}(\underline{X}'/\underline{X})$  en ensembles simpliciaux sur  $(\mathbf{A}^l/C(\underline{X}))^{\text{op}}$  (correspondant à la catégorie des objets d'un foncteur  $\Delta \times \mathbf{A}^l \rightarrow \text{Ens}$ ).

Sur  $\mathcal{C}_{\text{DD}}(\underline{X}'/\underline{X})$ , on peut mettre une structure de complexe classifiant  $\mathcal{G}_{\text{DD}}(\underline{X}'/\underline{X})$ .

En descendant le long de  $F_{\underline{X}'} : \mathcal{C}_{\text{DD}}(\underline{X}'/\underline{X}) \rightarrow \mathbf{\Lambda}^l/C(\underline{X})$ , on obtient un complexe classifiant  $\mathcal{G}(\underline{X}'/\underline{X}) = F_{\underline{X}'}^* \mathcal{G}_{\text{DD}}(\underline{X}'/\underline{X})$  sur  $\mathbf{\Lambda}^l/C(\underline{X})$ .

On a un isomorphisme

$$\mathcal{B}^{\text{alg}}(\mathcal{G}(\underline{X}'/\underline{X})) \simeq \mathcal{B}^{\text{alg}}(\mathcal{G}_{\text{DD}}(\underline{X}'/\underline{X}))$$

d'après la proposition 4.5.2.

Mais on peut aussi “calculer”  $\mathcal{B}^{\text{alg}}(\mathcal{G}_{\text{DD}}(\underline{X}'/\underline{X}))$  en le descendant le long du foncteur cofibrant  $F' : \mathcal{C}_{\text{DD}}(\underline{X}'/\underline{X}) \rightarrow \Delta^{\text{op}}$ .

Or la fibre en  $[n]$  du complexe classifiant  $\mathcal{G}_{\text{DD}}(\underline{X}'/\underline{X})$  est  $\mathcal{G}_C(\underline{X}'^{(n)})$ . Donc  $F'_*(\mathcal{G}_{\text{DD}}(\underline{X}'/\underline{X}))$  est l'objet simplicial des données de descentes de  $\underline{X}'/\underline{X}$ , et donc par descente étale des revêtements két,  $\mathcal{B}^{\text{alg}}(\mathcal{G}_{\text{DD}}(\underline{X}'/\underline{X})) \simeq \text{KCov}(X)$ .  
Donc :

$$\mathcal{B}^{\text{alg}}(\mathcal{G}(\underline{X}'/\underline{X})) \simeq \text{KCov}(X).$$

Si  $\underline{X}'$  et  $\underline{X}''$  sont maintenant deux  $l$ -fibrations étales sur  $X$ , on peut construire comme précédemment un objet bicosimplicial en complexes  $l$ -polysimpliciaux classifiant dont la fibre en  $([m], [n])$  est le complexe  $l$ -polysimplicial classifiant  $\mathcal{G}_C(\underline{X}'^{(m)} \times_{\underline{X}} \underline{X}''^{(n)})$ . Notons-le  $\mathcal{G}_{\text{DD}}(\underline{X}', \underline{X}''/\underline{X})/\mathcal{C}_{\text{DD}}(\underline{X}', \underline{X}''/\underline{X})$ .  
On a de plus un diagramme commutatif de foncteurs :

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{C}_{\text{DD}}(\underline{X}', \underline{X}''/\underline{X}) & \\ G_{\underline{X}'} \swarrow & & \searrow G_{\underline{X}''} \\ \mathcal{C}_{\text{DD}}(\underline{X}'/\underline{X}) & & \mathcal{C}_{\text{DD}}(\underline{X}''/\underline{X}) \\ F_{\underline{X}'} \searrow & & \swarrow F_{\underline{X}''} \\ & (\mathbf{\Lambda}^l/C(\underline{X}))^{\text{op}} & \end{array}$$

Or en descendant  $\mathcal{G}_{\text{DD}}(\underline{X}', \underline{X}''/\underline{X})$  le long de  $G_{\underline{X}'}$ , on obtient  $\mathcal{G}_{\text{DD}}(\underline{X}'/\underline{X})$ .

En effet la fibre en un objet  $x$  de  $\mathcal{G}_{\text{DD}}(\underline{X}'/\underline{X})$  correspondant à une strate  $x$  de  $X_l'^n$  est le complexe classifiant des revêtements két du log-schéma simplicial  $(\bar{x} \times_{X_l} X_l''^{(n)})$ ; or comme  $\bar{x} \times_{X_l} X_l'' \rightarrow \bar{x}$  est un morphisme de descente pour les revêtements két d'après [38, prop. 3.2.18], on en déduit le résultat voulu.

On a évidemment le résultat analogue pour  $X''$ . En appliquant le résultat de 4.5.2, on en déduit que  $\mathcal{G}_{\text{DD}}(\underline{X}'/\underline{X})$  ne dépend pas essentiellement pas de  $\underline{X}'$ .

On le notera donc  $\mathcal{G}_{\underline{X}}$ .

### 5.3.5 Comparaison des groupes fondamentaux tempérés

On a déjà une équivalence de catégories :

$$\mathcal{B}^{\text{alg}}(\mathcal{G}_{\underline{X}}) \simeq \text{KCov}(X).$$

Soit  $S$  un revêtement két de  $X$ . Soit  $T$  l'objet correspondant de  $\mathcal{B}^{\text{alg}}(\mathcal{G}(\underline{X}'/\underline{X}))$ . Alors le complexe  $l$ -polysimplicial  $C(S)$  associé à  $S$  est canoniquement isomorphe à  $C(X) \square D_T$ .

En effet, il suffit de construire l'isomorphisme localement pour la topologie étale

sur  $X$ , car si  $X' \rightarrow X$  est étale surjectif,  $C(S) = \text{Coker}(C(S_{X''}) \rightrightarrows C(S_{X'}))$  et  $C(X) \square D_T = \text{Coker}(C(X'') \square D_{T_{X''}} \rightrightarrows C(X') \square D_{T_{X'}})$ . On peut donc supposer  $X$  strictement polystable, où l'isomorphisme est évident par définition de  $C(S)$ . L'isomorphisme  $C(S) \simeq C(X) \square D_T$  induit une équivalence de catégories

$$\text{Cov}^{\text{top}}(C(X) \square D_T) \rightarrow \text{Cov}^{\text{top}}(C(S))$$

2-fonctorielle en  $S$ , d'où une équivalence des catégories fibrées correspondantes sur  $\mathcal{B}^{\text{alg}}(\mathcal{G}_{\underline{X}})$  et  $\text{KCov}(X)$ . En considérant les champs associés et en prenant les sections globales, on en déduit une équivalence de catégories

$$\mathcal{B}^{\text{temp}}(\mathcal{G}_{\underline{X}}) \simeq \text{Cov}^{\text{temp}}(X),$$

qui induit un isomorphisme

$$\pi_1^{\text{temp}}(\mathcal{G}_{\underline{X}}) \rightarrow \pi_1^{\text{temp}}(X).$$

## Chapitre 6

# Cospécialisation et groupe fondamental tempéré

Pour un morphisme propre de schémas  $f : X \rightarrow Y$  de fibres géométriquement connexes et une spécialisation  $\bar{y}_1 \rightarrow \bar{y}_2$  de points géométriques de  $Y$ , A. Grothendieck a construit un morphisme de spécialisation  $\pi_1^{\text{alg}}(X_{\bar{y}_1}) \rightarrow \pi_1^{\text{alg}}(X_{\bar{y}_2})$ . Le théorème de spécialisation de Grothendieck dit que ce morphisme est surjectif si  $f$  est séparable et induit un isomorphisme entre les quotients premiers à  $p$  si  $f$  est lisse (où  $p$  désigne la caractéristique de  $\bar{y}_2$ , qui est éventuellement 0), cf. [17, cor. X.2.4, cor. X.3.9].

En géométrie analytique complexe, un morphisme propre et lisse est, localement sur  $Y$ , une fibration triviale de variétés différentielles réelles ; en particulier toutes les fibres sont homéomorphes et ont donc des groupes fondamentaux (topologiques) isomorphes.

Peut-il y avoir un résultat analogue pour le groupe fondamental tempéré (ou plus raisonnablement  $(p')$ -tempéré) ?

Considérons le cas d'une famille de courbes elliptiques. Le groupe fondamental tempéré géométrique d'une courbe elliptique est  $\hat{\mathbf{Z}}^2$  si elle a bonne réduction et  $\hat{\mathbf{Z}} \times \mathbf{Z}$  si c'est une courbe de Tate. En particulier, dans une famille modulaire de courbes elliptiques avec structure de niveau<sup>1</sup>, le groupe fondamental tempéré ne peut être constant (ni même le groupe fondamental  $(p')$ -tempéré).

De plus, dans le contexte  $p$ -adique, si  $E_1$  est une courbe elliptique à mauvaise réduction et  $E_0$  est une courbe elliptique à réduction générique (et donc bonne réduction), il ne peut pas y avoir de morphisme  $\pi_1^{\text{temp}}(E_0)^{(p')} \rightarrow \pi_1^{\text{temp}}(E_1)^{(p')}$  qui induise le morphisme de spécialisation de Grothendieck sur les complétés profinis, bien que la réduction du point correspondant à  $E_1$  se spécialise sur la réduction du point correspondant à  $E_0$ . Il ne peut donc pas y avoir de spécialisation raisonnable.

Si néanmoins,  $\eta_1$  et  $\eta_2$  sont des points géométriques de l'espace analytique de modules tels que la réduction de  $\eta_1$  se spécialise sur la réduction de  $\eta_2$ , alors  $E_{\eta_1}$  a "meilleure réduction" que  $E_{\eta_2}$  et il existe des morphismes  $\pi_1^{\text{temp}}(E_{\eta_2}) \rightarrow$

---

1. pour éviter les champs. Cependant, les morphismes de cospécialisation que nous construisons seront locaux pour la topologie étale de la fibre spéciale de la base. Ainsi le fait de travailler avec un champ de Deligne-Mumford n'est pas vraiment un problème.

$\pi_1^{\text{temp}}(E_{\eta_1})$  qui induisent un isomorphisme sur les complétés profinis. C'est pourquoi nous chercherons à construire des morphismes de *cospécialisation* (plutôt que de spécialisation) du groupe fondamental tempéré.

Un problème qui apparaît tout de suite est qu'il n'y a pas en général de spécialisation non triviale entre les points d'un espace de Berkovich : par exemple un espace de Berkovich séparé a un espace topologique sous-jacent séparé, et donc s'il y a une spécialisation (pour la topologie de Berkovich, la topologie étale...) entre deux points géométriques d'un espace de Berkovich séparé, les deux points géométriques doivent avoir même point sous-jacent. Ainsi nous fixons un modèle de  $Y$  sur  $O_K$  ayant d'assez bonnes propriétés, et les "morphismes de spécialisation" entre points géométriques de  $Y^{\text{an}}$  que nous considérerons seront en fait des morphismes de spécialisation entre leurs réductions.

Nous allons étudier la situation suivante. Soit  $K$  un corps à valuation discrète,  $O_K$  son anneau des entiers,  $k$  son corps résiduel et  $p$  la caractéristique de  $k$  (qui peut être 0). Soit  $\mathbb{L}$  un ensemble de nombres premiers ne contenant pas  $p$ . Soit  $X \rightarrow Y$  un morphisme pluristable de log schémas sur  $O_K$ .

Si  $\eta_1$  est un point de  $Y_{\text{tr}}^{\text{an}}$  tel que  $\mathcal{H}(\eta_1)$  soit à valuation discrète, on sait décrire le groupe fondamental  $(p')$ -tempéré de  $X_{\eta_1}$  en terme de  $X_{s_1}$  où  $s_1$  est la log réduction de  $\eta_1$ . Pour que cette réduction existe, on supposera  $Y$  propre sur  $O_K$  ; sinon il faudrait se limiter à considérer les points  $\eta_1$  dans le tube de la fibre spéciale  $Y$  et remplacer  $Y_{\text{tr}}^{\text{an}}$  par son intersection avec ce tube (les résultats qui suivront sont encore vrai dans ce contexte-ci plus général).

On peut alors reformuler notre problème de cospécialisation en terme de la fibre spéciale de  $Y$ . Nous supposons alors  $Y$  log lisse sur  $O_K$  (ceci munit  $Y$  d'une stratification canonique). Nous ferons également une hypothèse sur le comportement combinatoire des fibres géométriques  $X \rightarrow Y$ . Plus précisément, on supposera que l'ensemble polysimplicial associé aux fibres géométriques de  $X \rightarrow Y$  est intérieurement libre ; c'est par exemple le cas si  $X \rightarrow Y$  est strictement polystable ou si  $X \rightarrow Y$  est de dimension relative 1.

Nous prouverons alors le résultat suivant :

**Théorème 6.0.1.** *Soit  $\eta_1$  et  $\eta_2$  deux points de  $Y_{\text{tr}}^{\text{an}}$  à valuation discrète, et soit  $\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2$  des points géométriques au-dessus de ces points. Soit  $\bar{s}_2 \rightarrow \bar{s}_1$  une spécialisation entre leurs log réductions. Alors il existe un morphisme naturel dit de cospécialisation*

$$\pi_1^{\text{temp}}(X_{\bar{\eta}_1})^{\mathbb{L}} \rightarrow \pi_1^{\text{temp}}(X_{\bar{\eta}_2})^{\mathbb{L}},$$

*qui est un isomorphisme si  $\bar{s}_1$  et  $\bar{s}_2$  sont dans la même strate de  $Y$ .*

Si l'on ne suppose plus que les fibres géométriques de  $X \rightarrow Y$  ont des ensembles polysimpliciaux intérieurement libres, il y a encore un morphisme de cospécialisation si  $\bar{s}_2$  est le point générique d'une strate.

La première chose dont nous aurons besoin pour construire le morphisme de cospécialisation pour le groupe fondamental  $(p')$ -tempéré est un morphisme de spécialisation pour les groupes fondamentaux logarithmiques pro- $(p')$  de  $X_{\bar{s}_1}$  et  $X_{\bar{s}_2}$  qui étend tout revêtement két  $(p')$  de  $X_{s_1}$  sur un voisinage két de  $s_1$  (si

l'on a un tel morphisme de spécialisation, en les comparant aux groupes fondamentaux algébriques de  $X_{\bar{\eta}_1}$  et  $X_{\bar{\eta}_2}$  et en utilisant le théorème de spécialisation de Grothendieck, nous obtiendrons facilement que c'est un isomorphisme). Ce morphisme de spécialisation se déduit aisément de [36] si  $s_1$  est un point strict de  $Y$ . Ainsi nous étudierons l'invariance du groupe fondamental log géométrique par changement de point base.

Nous nous intéresserons alors au cas, plus simple, où  $X \rightarrow Y$  est une courbe relative. Dans ce contexte nous n'aurons pas à utiliser les ensembles polysimpliciaux de Berkovich. Nous obtiendrons également un résultat meilleur que dans le cas de dimension supérieure : nous n'aurons pas à supposer  $Y$  log lisse et nous n'aurons pas non plus à supposer  $X \rightarrow Y$  vertical.

Nous reviendrons alors au cas général. Nous étudierons le comportement combinatoire d'un revêtement két vis-à-vis de la cospécialisation. Des morphismes de cospécialisations d'ensembles polysimpliciaux des fibres d'une fibration polystable sont déjà donnés par Berkovich dans [7, cor. 6.2] quand  $Y$  est plurinodal et  $s_1, s_2$  sont les points génériques topologiques d'une strate de  $Y$  sans hypothèse de propreté. La construction s'étend facilement, localement pour la topologie étale, à notre situation si l'on suppose encore que  $s_2$  est le point générique d'une strate. Pour obtenir un morphisme de cospécialisation d'ensembles polysimpliciaux des fibres géométriques, nous devrons prouver qu'après une nouvelle localisation két en  $\bar{s}_1$ , les strates de  $X_{s_2}$  dont l'adhérence rencontre  $X_k$  sont géométriquement connexes. Cela proviendra du fait qu'après localisation supplémentaire, l'adhérence de la clôture de ces strates sont plates sur leur image dans  $Y$  et ont des fibres géométriques réduites. On descend alors ces morphismes de cospécialisation que l'on avait localement pour la topologie étale. Dans le cas propre initial, le morphisme de cospécialisation est un isomorphisme si  $s_1$  et  $s_2$  sont dans la même strate de  $Y$  et l'ensemble polysimplicial de  $X_{\bar{s}_2}$  est intérieurement libre. Ces morphismes de cospécialisation commutent avec les revêtements két, et donc nous donneront les morphismes de cospécialisation voulus.

## 6.1 Spécialisation des groupes fondamentaux log géométriques

Etudions la spécialisation des groupes fondamentaux log géométriques (c'est-à-dire la limite projective des groupes fondamentaux logarithmiques par extension két du log point de base). Notre principal résultat sera l'invariance du groupe fondamental log géométrique d'un log schéma fs  $X$ , saturé et de type fini sur un log point fs  $s$  de corps séparablement clos, par changement de base fs  $s' \rightarrow s$  qui est un isomorphisme sur le schéma sous-jacent. L'hypothèse implique que le changement de base  $X_{s'} \rightarrow X$  dans la catégorie des log schémas fs induit un isomorphisme  $\check{X}_{s'} \rightarrow \check{X}$  entre les schémas sous-jacents. En travaillant localement sur la topologie étale de  $\check{X}$ , nous nous réduirons au cas où  $\check{X}$  est strictement local et hensélien, cas dans lequel le groupe fondamental log géométrique peut être explicitement décrit en terme du morphisme de monoïdes  $\overline{M}_X \rightarrow \overline{M}_s$ .

Combinant ce résultat d'invariance par changement de base du groupe fondamental log géométrique pro- $(p')$  et la spécialisation du groupe fondamental log

géométrique pro- $(p')$  dans le cas strict ([36]), nous obtiendrons que si  $X \rightarrow S$  est un morphisme propre, log lisse et saturé, et si  $s_2, s_1$  sont des points fs de  $S$  et  $\bar{s}_2 \rightarrow \bar{s}_1$  est une spécialisation de points log géométriques de  $S$  au-dessus de  $s_2$  et  $s_1$ , alors il y a un morphisme de spécialisation

$$\pi_1^{\log\text{-géom}}(X_{s_2})^{(p')} \rightarrow \pi_1^{\log\text{-géom}}(X_{s_1})^{(p')}$$

(ce sera le seul résultat dont nous aurons besoin par la suite).

**Lemme 6.1.1.** *Soit  $s' \rightarrow s$  un morphisme strict de log points tels que  $\mathring{s}'$  et  $\mathring{s}$  soient des points géométriques de caractéristique  $p$ . Soit  $X \rightarrow s$  un morphisme de log schémas fs tel que  $\mathring{X} \rightarrow \mathring{s}$  soit de type fini.*

*Alors  $F : \text{KCov}(X)^{(p')} \rightarrow \text{KCov}(X_{s'})^{(p')}$  est une équivalence de catégories.*

*Démonstration.* Si  $T$  est un revêtement k  t connexe de  $X$ ,  $T \times_{\mathring{s}} \mathring{s}' \rightarrow \mathring{T} \times_{\mathring{s}} \mathring{s}'$  est un isomorphisme puisque  $s' \rightarrow s$  est strict.  $\mathring{T} \times_{\mathring{s}} \mathring{s}'$  est aussi connexe, donc  $F$  est bien pleinement fidèle.

Comme on sait déjà que  $F$  est pleinement fidèle pour tout  $X$ , et comme les recouvrements étales stricts sont de descente effective pour les revêtements k  t, on peut prouver le résultat localement pour la topologie étale, et ainsi supposer que  $X$  a une carte globale  $X \rightarrow \text{Spec } \mathbf{Z}[P]$ .

Soit  $S'$  un revêtement k  t de  $X_{s'}$ . Alors il existe un morphisme  $(p')$ -Kummer de mono  ides  $P \rightarrow Q$  tel que

$$S'_Q := S' \times_{\text{Spec } \mathbf{Z}[P]} \text{Spec } \mathbf{Z}[Q] \rightarrow X_{s',Q} := X_{s'} \times_{\text{Spec } \mathbf{Z}[P]} \text{Spec } \mathbf{Z}[Q]$$

soit strict étale (et surjectif).

Mais, puisque  $\mathring{X}_{s',Q} \rightarrow \mathring{X}_Q \times_{\mathring{s}} \mathring{s}'$  est un isomorphisme de schémas,  $\text{Cov}^{\text{alg}}(\mathring{X}_{s',Q}) \rightarrow \text{Cov}^{\text{alg}}(\mathring{X}_Q)$  est une équivalence de catégories ([37, cor 4.5]). Ainsi, il existe un revêtement étale strict  $S_Q$  de  $X_Q$  (et donc  $S_Q \rightarrow X$  est un revêtement k  t) tel que  $S'_Q$  soit  $X_{s',Q}$ -isomorphe à  $S_Q \times_s s'$ . Donc  $F$  est une équivalence de catégories.  $\square$

Soit  $X \rightarrow s$  un morphisme de log schémas fs, où  $s$  est un log point fs. Soit  $\bar{x}$  un point log géométrique de  $X$  et soit  $\bar{s}$  son image dans  $s$ .

Définissons le *groupe fondamentale log géométrique* de  $X$  en  $\bar{x}$  comme étant

$$\pi_1^{\log\text{-géom}}(X/s, \bar{x}) = \text{Ker}(\pi_1^{\log}(X, \bar{x}) \rightarrow \pi_1^{\log}(s, \bar{s})).$$

Si  $(t, \bar{t}) \rightarrow (s, \bar{s})$  est un revêtement k  t connexe galoisien pointé de  $(s, \bar{s})$ , notons  $X_t = X \times_s t$  et  $\bar{x}_t = (\bar{x}, \bar{t})$ . On a alors la suite exacte :

$$1 \rightarrow \pi_1^{\log}(X_t, \bar{x}_t) \rightarrow \pi_1^{\log}(X, \bar{x}) \rightarrow \text{Gal}(t/s),$$

et le morphisme de droite est surjectif si  $X_t$  est connexe (nous dirons que  $X$  est *log géométriquement connexe* si  $X_t$  est connexe pour tout revêtement k  t connexe  $t$  de  $s$ ).

En prenant la limite projective de la suite exacte précédente quand  $(t, \bar{t})$  parcourt la catégorie dirigée des revêtements galoisiens pointés de  $(s, \bar{s})$ , on obtient un isomorphisme canonique  $\pi_1^{\log\text{-géom}}(X/s, \bar{x}) = \varprojlim_{(t, \bar{t})} \pi_1^{\log}(X_t, \bar{x}_t)$ .

En fait, si  $\tilde{t} \rightarrow t$  est le sous-schéma réduit de  $t$  muni de la log structure image



inverse, le morphisme  $\pi_1^{\log}(X_{\bar{t}}, \bar{x}_t) \rightarrow \pi_1^{\log}(X_t, \bar{x}_t)$  est un isomorphisme. On peut donc remplacer  $X_t$  par  $X_{\bar{t}}$  dans la limite projective précédente.

Si l'on a un carré commutatif de log schémas fs pointés :

$$\begin{array}{ccc} (X', \bar{x}') & \xrightarrow{\phi} & (X, \bar{x}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (s', \bar{s}') & \xrightarrow{\psi} & (s, \bar{s}) \end{array}$$

où  $s'$  et  $s$  sont des log points, on obtient un diagramme commutatif de groupes profinis :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1^{\log}(X', \bar{x}') & \longrightarrow & \pi_1^{\log}(X, \bar{x}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1^{\log}(s', \bar{s}') & \longrightarrow & \pi_1^{\log}(s, \bar{s}) \end{array}$$

En prenant le noyau des flèches verticales, on obtient un morphisme  $\pi_1^{\log\text{-géom}}(X'/s', \bar{x}') \rightarrow \pi_1^{\log\text{-géom}}(X/s, \bar{x})$ , qui est fonctoriel en  $(\phi, \psi)$ .

On a aussi, par définition du pro-revêtement pointé universel de  $(s', \bar{s}')$ , un morphisme canonique de pro-revêtements k  t pointés de  $(s', \bar{s}')$

$$\varprojlim_{(t', \bar{t}')} (t', \bar{t}') \rightarrow \varprojlim_{(t, \bar{t})} \psi^*(t, \bar{t}),$$

où  $(t', \bar{t}')$  parcourt les revêtements k  t galoisiens connexes de  $(s', \bar{s}')$  et  $(t, \bar{t})$  parcourt les revêtements k  t galoisiens connexes de  $(s, \bar{s})$ , d'où un morphisme de pro-log schémas fs pointés

$$\varprojlim_{(t', \bar{t}')} (t', \bar{t}') \rightarrow \varprojlim_{(t, \bar{t})} (t, \bar{t}).$$

Cela induit un morphisme de pro-log schémas fs pointés

$$\varprojlim (X'_{t'}, \bar{x}'_{t'}) \rightarrow \varprojlim (X_t, \bar{x}_t),$$

d'où un morphisme de groupes profinis

$$\varprojlim \pi_1^{\log}(X'_{t'}, \bar{x}'_{t'}) \rightarrow \varprojlim \pi_1^{\log}(X_t, \bar{x}_t),$$

tel que le carré commutatif de groupes profinis soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \varprojlim \pi_1^{\log}(X'_{t'}, \bar{x}'_{t'}) & \longrightarrow & \varprojlim \pi_1^{\log}(X_t, \bar{x}_t) \\ \parallel & & \parallel \\ \pi_1^{\log\text{-géom}}(X'/s', \bar{x}') & \longrightarrow & \pi_1^{\log\text{-géom}}(X/s, \bar{x}) \end{array}$$

Considérons maintenant  $s' \rightarrow s$  un morphisme de log points fs, tel que le morphisme sous-jacent de schémas  $\mathring{s}' \rightarrow \mathring{s}$  soit un isomorphisme de points géométriques, et soit  $X \rightarrow s$  un morphisme saturé de log schémas fs avec  $\mathring{X}$

noethérien et  $\mathring{X} \rightarrow \mathring{s}$  (géométriquement) connexe. Puisque  $X \rightarrow s$  est saturé,  $X$  est log géométriquement connexe.

Posons  $X' := X \times_s s'$ . Soit  $\bar{x}'$  un point log géométrique de  $X'$  et soient  $\bar{x}$ ,  $\bar{s}'$  et  $\bar{s}$  l'image de  $\bar{x}'$  dans  $X$ ,  $s'$  et  $s$  respectivement.

On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \pi_1^{\log}(X', \bar{x}') & \longrightarrow & \pi_1^{\log}(X, \bar{x}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1^{\log}(s', \bar{s}') & \longrightarrow & \pi_1^{\log}(s, \bar{s}) \end{array}$$

**Théorème 6.1.2.** *Le morphisme  $\pi_1^{\log\text{-g\'eom}}(X'/s', \bar{x}') \rightarrow \pi_1^{\log\text{-g\'eom}}(X/s, \bar{x})$  est un isomorphisme.*

*Démonstration.* Soit  $(s_i, \bar{s}_i)_{i \in I}$  un système cofinal de revêtements két connexes galoisiens pointés de  $(s, \bar{s})$  et soit  $\tilde{s}_i$  le sous schéma réduit de  $s_i$  muni de la log structure image inverse. Posons  $(X_i, \bar{x}_i) := (X \times_s \tilde{s}_i, (\bar{x}, \bar{s}_i))$ .

Soit  $(s'_j, \bar{s}'_j)_{j \in J}$  un système cofinal de revêtements két galoisiens connexes pointés de  $(s', \bar{s}')$  (et soit  $\tilde{s}'_j$  le sous-schéma réduit de  $s'_j$  muni de la log structure image inverse. Posons  $(X'_j, \bar{x}'_j) = (X \times_{s'} \tilde{s}'_j, \bar{x}' \times_{\bar{s}'} \bar{s}'_j)$ .

Il faut prouver que

$$\varprojlim_j \pi_1^{\log}(X'_j, \bar{x}'_j) \rightarrow \varprojlim_i \pi_1^{\log}(X_i, \bar{x}_i)$$

est un isomorphisme.

Si  $Y$  est un log schéma fs, notons  $\epsilon_Y : Y_{\text{két}} \rightarrow \mathring{Y}_{\text{ét}}$  le morphisme usuel de topoi du topos két de  $Y$  au topos étale du sous-schéma sous-jacent à  $Y$ .

$\tilde{s}_i$  a même schéma sous-jacent que  $s$ , donc  $\mathring{X}_i \rightarrow \mathring{X}$  est un isomorphisme de schémas puisque  $X \rightarrow s$  est saturé. De même  $\mathring{X}'_j \rightarrow \mathring{X}'$  est un isomorphisme, et sont isomorphes à  $\mathring{X}$ .

Plus précisément, pour tout  $i$ , il existe  $j_0$  tel que pour  $i \geq i'$  et  $j \geq j' \geq j_0$ , on ait un diagramme 2-commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} X'_{j,\text{két}} & \xrightarrow{\quad} & X'_{j',\text{két}} & & \\ \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \\ & X_{i,\text{két}} & \xrightarrow{\quad} & X_{i',\text{két}} & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathring{X}'_{j,\text{ét}} & \xrightarrow{\quad} & \mathring{X}'_{j',\text{ét}} & & \\ \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \\ & \mathring{X}_{i,\text{ét}} & \xrightarrow{\quad} & \mathring{X}_{i',\text{ét}} & \end{array}$$

où tous les morphismes de schémas du carré du bas sont des isomorphismes.

Si  $G$  est un groupe fini, on a un diagramme 2-commutatif de champs sur  $\mathring{X}_{\text{ét}}$  :

$$\begin{array}{ccc} \epsilon_{X'_j*} \text{Tors}_{X'_{j,\text{két}}}(G) & \longrightarrow & \epsilon_{X'_j*} \text{Tors}_{X'_{j,\text{két}}}(G) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \epsilon_{X_i*} \text{Tors}_{X_{i,\text{két}}}(G) & \longrightarrow & \epsilon_{X_i*} \text{Tors}_{X_{i,\text{két}}}(G) \end{array}$$

Plus précisément, notons  $IJ = I \coprod J$  muni de la relation d'ordre suivante :

- la restriction de l'ordre à  $I$  (resp.  $J$ ) est l'ordre usuel,
- si  $i \in I$  et  $j \in J$ , alors  $i \leq j$  si et seulement si il existe un (nécessairement unique) morphisme de log schémas fs pointés  $(s'_j, \bar{s}'_j) \rightarrow (s_i, \bar{s}_i)$  qui rende le carré

$$\begin{array}{ccc} (s'_j, \bar{s}'_j) & \rightarrow & (s_i, \bar{s}_i) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (s', \bar{s}') & \rightarrow & (s, \bar{s}) \end{array}$$

commutatif,

- si  $j \in J$  et  $i \in I$ , alors  $j \not\leq i$ .

Notons aussi  $IJ$  la catégorie correspondante. On a une catégorie fibrée sur  $IJ^{\text{op}} \times \mathring{X}_{\text{ét}}$ , dont la fibre en  $(i, U)$  est  $\epsilon_{X_i*} \text{Tors}_{X_{i,\text{két}}}(G)(U)$  et la fibre en  $(j, U)$  est  $\epsilon_{X'_j*} \text{Tors}_{X'_{j,\text{két}}}(G)(U)$ .

En prenant la limite inductive pour  $i \in I$ , qui est filtrante, on obtient, grâce à [16, I.1.10], une catégorie fibrée sur  $\mathring{X}_{\text{ét}}$  dont la fibre en  $U$  est  $\varinjlim_i \epsilon_{\widetilde{X}_i*} \text{Tors}_{\widetilde{X}_{i,\text{két}}}(G)(U)$ .

Notons  $\varinjlim_i \epsilon_{\widetilde{X}_i*} \text{Tors}_{\widetilde{X}_{i,\text{két}}}(G)$  le champ associé à cette catégorie fibrée (et faisons la même chose pour  $X'$  et  $J$ ).

Puisque  $\mathring{X}$  est supposé noetherien (et donc  $\mathring{X}_{\text{ét}}$  est un topos cohérent), le foncteur de  $\varinjlim_j \text{Tors}(G, X'_{j,\text{két}})$  vers la catégorie des sections globales de  $\varinjlim_j \epsilon_{X'_j*} \text{Tors}_{X'_{j,\text{két}}}(G)$  est une équivalence de catégories. De plus

$$\varinjlim_j \text{Tors}(G, X'_{j,\text{két}}) \simeq \varinjlim_j \text{Tors}(G, \pi_1^{\log}(X'_j, \bar{x}'_j) - \text{Ens}) \simeq \text{Tors}(G, \varprojlim_i \pi_1^{\log}(X'_j, \bar{x}'_j) - \text{Ens}).$$

Les diagrammes 2-commutatifs induisent un morphisme de champs :

$$\varinjlim_j \epsilon_{X'_j*} \text{Tors}_{X'_{j,\text{két}}}(G) \rightarrow \varinjlim_i \epsilon_{X_i*} \text{Tors}_{X_{i,\text{két}}}(G) \quad (6.1)$$

Nous n'avons donc qu'à prouver que (6.1) est une équivalence de champs, ce qui se prouve fibre à fibre (puisque les points de  $\mathring{X}_{\text{ét}}$  forment un système conservatif). Ceci ne dépend plus des points de base initiaux que l'on avait dans l'énoncé du théorème ; nous pouvons donc les oublier, ainsi nous utiliserons les mêmes notations pour d'autres points.

Soit  $x$  un point de  $\mathring{X}_{\text{ét}}$ ,  $\bar{x}'$  un point de  $X'_{\text{két}}$  au dessus de  $x$  d'image  $\bar{x}$  dans  $X_{\text{két}}$ , et soit  $V_x$  la catégorie des voisinages étales de  $x$  dans  $\mathring{X}$ . On a alors (par cohérence du morphisme de topoi  $\epsilon_{X_i}$ , comme dans [36, dem of 2.4]) :

$$\begin{aligned} \varinjlim_{U \in V_x} \varinjlim_i \epsilon_{X_i*} \text{Tors}_{X_{i,\text{két}}}(G)(U) &= \varinjlim_i \varinjlim_{U \in V_x} \epsilon_{X_i*} \text{Tors}_{X_{i,\text{két}}}(G)(U) \\ &= \varinjlim_i \text{Tors}(G, X(x)_{i,\text{két}}) \\ &= \text{Tors}(G, \varprojlim_i \pi_1^{\log}(X(x)_{i,\text{két}}, \bar{x} \times s_i) - \text{Ens}), \end{aligned}$$

et l'on a un résultat similaire pour  $X'$ .

On a donc juste à prouver que

$$\varprojlim_j \pi_1^{\log}(X'(x)_{j,\text{két}}, \bar{x}' \times_{\bar{s}'} \bar{s}'_j) \rightarrow \varprojlim_i \pi_1^{\log}(X(x)_{i,\text{két}}, \bar{x} \times_{\bar{s}} \bar{s}_i)$$

est un isomorphisme.

Nous nous sommes donc réduit au cas où  $\check{X}$  est un schéma noethérien, strictement local et hensélien. Mais alors, pour un schéma noethérien, strictement local et hensélien  $\check{X}$ , on a d'après [38, prop. 3.1.11]

$$\varprojlim_i \pi_1^{\log}(X_{i,\text{két}}, \bar{x} \times_{\bar{s}} \bar{s}_i) = \varprojlim_i \overline{M}_{X_i}^{\text{gp}\vee} \otimes \widehat{\mathbf{Z}}^{(p')} = \text{Coker}(\overline{M}_s^{\text{gp}} \rightarrow \overline{M}_X^{\text{gp}})^{\vee} \otimes \widehat{\mathbf{Z}}^{(p')},$$

et l'on a un résultat similaire pour  $X'$ .  $\text{Coker}(\overline{M}_s^{\text{gp}} \rightarrow \overline{M}_X^{\text{gp}}) \rightarrow \text{Coker}(\overline{M}_{s'}^{\text{gp}} \rightarrow \overline{M}_{X'}^{\text{gp}})$  est un isomorphisme.

On obtient donc le résultat voulu.  $\square$

Supposons maintenant seulement que  $(s', \bar{s}') \rightarrow (s, \bar{s})$  soit un morphisme de log points, que  $Y \rightarrow s$  soit un morphisme saturé et que  $X \rightarrow Y$  soit un morphisme két avec  $\check{X}$  de type fini sur  $s$ .

**Corollaire 6.1.3.** *Le morphisme de groupes profinis*

$$\pi_1^{\log\text{-géom}}(X/s, \bar{x})^{(p')} \rightarrow \pi_1^{\log\text{-géom}}(X'/s', \bar{x}')^{(p')}$$

*est un isomorphisme.*

*Démonstration.* Quitte à remplacer  $s$  (resp.  $s'$ ) par le sous-schéma réduit d'un revêtement k  t connexe de  $s$  (resp.  $s'$ ), on peut supposer que  $X \rightarrow s$  est saturé ( $\check{X} \rightarrow \check{s}$  sera encore de type fini).

Si  $(t, \bar{t}) \rightarrow (s, \bar{s})$  est un revetement étale strict, alors  $\pi_1^{\log\text{-géom}}(X_t/t, \bar{x}_t) \rightarrow \pi_1^{\log\text{-géom}}(X/s, \bar{x})$  est un isomorphisme. Ainsi, en notant  $s_0$  la clôture séparable de  $s$  et en prenant la limite projective sur les revêtements étales stricts pointés de  $s$  (puisque  $\pi_1^{\log}(X_{s_0}) = \varprojlim \pi_1^{\log}(X_t)$ , où  $t$  parcourt les revêtements étales stricts pointés de  $s$ ), on obtient  $\pi_1^{\log\text{-géom}}(X_{s_0}/s_0, \bar{x}_0) \rightarrow \pi_1^{\log\text{-géom}}(X/s, \bar{x})$  est un isomorphisme. On peut alors supposer que  $\check{s}$  et  $\check{s}'$  sont des points géométriques. Considérons le log schéma fs  $s''$  de schéma sous-jacent  $s'$  et dont la log structure est l'image inverse de la log structure de  $s$ .

Ainsi, on a des morphismes  $s' \rightarrow s'' \rightarrow s$ , où  $s' \rightarrow s''$  est un isomorphisme de schémas sous-jacents et  $s'' \rightarrow s$  est strict.

Grâce au lemme 6.1.1,  $\pi_1^{\log}(X_{s''})^{(p')} \rightarrow \pi_1^{\log}(X)^{(p')}$  et  $\pi_1^{\log}(s'')^{(p')} \rightarrow \pi_1^{\log}(s)^{(p')}$  sont des isomorphismes. Ainsi,

$$\pi_1^{\log\text{-géom}}(X_{s''}/s'') \rightarrow \pi_1^{\log\text{-géom}}(X/s)$$

est un isomorphisme.

Par 6.1.2,  $\pi_1^{\log\text{-géom}}(X_{s'}/s') \rightarrow \pi_1^{\log\text{-géom}}(X_{s''}/s'')$  est aussi un isomorphisme.  $\square$

Rappelons que si  $S$  est un schéma strictement local de point fermé  $s$  et si  $X$  est un log schéma fs connexe tel que  $\check{X}$  est propre sur  $S$ , alors

$$\text{KCov}(X) \rightarrow \text{KCov}(X_s)$$

est une équivalence de catégories (théorème 1.3.1).

Soit  $X \rightarrow S$  un morphisme propre et saturé de log schemes fs, et soit  $Y \rightarrow X$  un revêtement két. Soit  $s$  et  $s'$  deux points de  $S$  et supposons que l'on ait une spécialisation  $\bar{s}' \rightarrow \bar{s}$  (où  $\bar{s}$  et  $\bar{s}'$  sont des points log géométriques sur  $s$  et  $s'$ ). Soit  $Z$  le localisé strict de  $S$  à  $s$  muni de la log structure image inverse, et soit  $z$  son point fermé, muni de la log structure image inverse.

On a les morphismes suivants (définis à automorphismes intérieurs près) :

$$\pi_1^{\log\text{-géom}}(Y_s/s)^{(p')} \xrightarrow{\sim} \pi_1^{\log\text{-géom}}(Y_z/z)^{(p')} \xrightarrow{\sim} \pi_1^{\log\text{-géom}}(Y_Z/Z)^{(p')} \leftarrow \pi_1^{\log\text{-géom}}(Y_{s'}/s')^{(p')}$$

où les deux premiers morphismes sont des isomorphismes d'après le corollaire 6.1.3 et le théorème 1.3.1.

**Corollaire 6.1.4.** *On a un morphisme de spécialisation*

$$\pi_1^{\log\text{-géom}}(Y_{s'}/s')^{(p')} \rightarrow \pi_1^{\log\text{-géom}}(Y_s/s)^{(p')}$$

qui se factorise à travers  $\pi_1^{\log\text{-géom}}(Y_Z/Z)^{(p')}$ .

## 6.2 Cas des courbes

### 6.2.1 Définitions

#### Graphes

Rappelons qu'un *graphe*  $\mathbb{G}$  consiste en la donnée d'un ensemble  $\mathcal{E}$  d'"arêtes", d'un ensemble  $\mathcal{V}$  de "sommets", et pour tout  $e \in \mathcal{E}$ , d'un ensemble de branches  $\mathcal{B}_e$  de cardinal 2 et d'une fonction  $\psi_e : \mathcal{B}_e \rightarrow \mathcal{V}$ .

On peut, de façon équivalente remplacer la donnée des arêtes et des branches de chaque arête par la donnée de l'ensemble de toutes les branches  $\mathcal{B} = \coprod_e \mathcal{B}_e$  muni d'une involution  $\iota$  sans point fixe et d'une fonction  $\psi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{V}$ .  $E$  est alors l'ensemble des orbites de branches pour  $\iota$ .

Un *vrai morphisme de graphe*  $\phi : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{G}'$  est donné par une fonction  $\phi_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ , une fonction  $\phi_{\mathcal{V}} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}'$  et pour tout  $e \in \mathcal{E}$  une bijection  $\phi_e : \mathcal{B}_e \rightarrow \mathcal{B}'_{\phi_{\mathcal{E}}(e)}$  telles que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}_e & \longrightarrow & \mathcal{B}'_{\phi_{\mathcal{E}}(e)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{V} & \longrightarrow & \mathcal{V}' \end{array}$$

Cependant la cospécialisation topologique des courbes semistables sera donnée par des applications entre graphes qui ne sont pas en général des vrais morphismes.

Un *morphisme généralisé de graphe*  $\phi : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{G}'$  est donné par :

- une fonction  $\phi_{\mathcal{V}} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}'$ ,
- une fonction  $\phi_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}' \amalg \mathcal{V}'$ ,
- pour tout  $e \in \mathcal{E}$  tel que  $\phi_{\mathcal{E}}(e) \in \mathcal{E}'$ , une bijection  $\phi_e : \mathcal{B}_e \rightarrow \mathcal{B}'_{\phi_{\mathcal{E}}(e)}$  qui fait commuter le diagramme évident (le même que pour les vrais morphismes),

- pour tout  $e \in \mathcal{E}$  tel que  $\phi_{\mathcal{E}}(e) \in \mathcal{V}'$  et toute branche  $b \in \mathcal{B}_e$  de  $e$ ,  $\phi_{\mathcal{V}}(\psi_e(b)) = \phi_{\mathcal{E}}(e)$ .

On peut remplacer les deux dernières données par une fonction  $\phi_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}' \amalg \mathcal{V}'$  telle que si  $\phi_{\mathcal{B}}(b) \in \mathcal{B}'$  then  $\phi_{\mathcal{B}}(\iota(b)) = \iota'(\phi_{\mathcal{B}})$  et si  $\phi_{\mathcal{B}}(b) \in \mathcal{V}'$ , alors  $\phi_{\mathcal{B}}(\iota(b)) = \phi_{\mathcal{B}}(b)$ .

En particulier, un vrai morphisme est un morphisme généralisé. Il y a une notion évidente de composition des morphismes généralisés de graphes.

On obtient ainsi une catégorie Graph de graphes pour laquelle les morphismes sont des vrais morphismes de graphes et une catégorie GenGraph de graphes pour laquelle les morphismes sont les morphismes généralisés de graphes.

Il y a un foncteur réalisation géométrique  $|\cdot| : \text{GenGraph} \rightarrow \text{Top}$  qui envoie un graphe  $\mathbb{G}$  vers

$$|\mathbb{G}| := \text{Coker}\left(\coprod_{b \in \mathcal{B}} \text{pt}_{1,b} \amalg \text{pt}_{2,b} \rightrightarrows \coprod_{v \in \mathcal{V}} \text{pt}_v \amalg \coprod_{b \in \mathcal{B}} [1/2, 1]_b\right),$$

où

- la flèche du haut envoie :
  - $\text{pt}_{1,b}$  sur  $1/2 \in [1/2, 1]_b$
  - $\text{pt}_{2,b}$  sur  $1 \in [1/2, 1]_b$ ,
- la flèche du bas envoie :
  - $\text{pt}_{1,b}$  sur  $1/2 \in [1/2, 1]_{\iota(b)}$
  - $\text{pt}_{2,b}$  sur  $\text{pt}_{\psi(b)}$ .

Si  $\phi : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{G}'$  est un morphisme généralisé de graphes,  $|\phi|$  est obtenu en envoyant

- $\text{pt}_v$  sur  $\text{pt}_{\phi_{\mathcal{V}}(v)}$ ,
- $[1/2, 1]_b$  sur  $[1/2, 1]_{\phi_{\mathcal{B}}(b)}$  si  $\phi_{\mathcal{B}}(b) \in \mathcal{B}'$  (par l'identité de  $[1/2, 1]$ ),
- $[1/2, 1]_b$  sur  $\text{pt}_{\phi_{\mathcal{B}}(b)}$  si  $\phi_{\mathcal{B}}(b) \in \mathcal{V}'$ .

### Courbes semistables

**Définition 6.2.1.** Un morphisme de schéma  $X \rightarrow S$  est une *courbe strictement semistable* (resp. *semistable*) si pour tout point géométrique  $x$  de  $X$ , d'image  $s$  dans  $S$ , il existe un voisinage étale  $U$  de  $s$  et un voisinage de Zariski (resp. étale)  $V$  de  $x$  dans  $X \times_S U$  tels que  $V \rightarrow U$  se factorise à travers un morphisme étale  $V \rightarrow \text{Spec } A[X, Y]/(XY - a)$  ou  $V \rightarrow \text{Spec } A[X]$ .

De même, il y a un pendant logarithmique à cette définition.

**Définition 6.2.2.** Un morphisme  $X \rightarrow S$  de log schémas fs est une *courbe log strictement semistable* (resp. *log semistable*) si pour tout point géométrique  $x$  de  $X$ , d'image  $s$  dans  $S$ , il existe un voisinage étale  $U$  de  $s$ , un voisinage de Zariski (resp. étale)  $V$  de  $x$  dans  $X \times_S U$  et une carte  $U \rightarrow \text{Spec } P$  de  $U$  telle que l'une des propriétés suivantes soit vérifiée :

- $V \rightarrow U$  est une courbe lisse stricte,
- $V \rightarrow U$  se factorise à travers un morphisme étale  $V \rightarrow U \times_{\text{Spec } \mathbf{Z}[P]} \text{Spec } \mathbf{Z}[Q]$  avec  $Q = (P \oplus \langle u, v \rangle) / (u \cdot v = p)$  avec  $p \in P$  et où la log structure de  $V$  est celle associée à  $Q$ ,
- $V \rightarrow U$  se factorise à travers un morphisme étale  $V \rightarrow U \times_{\text{Spec } \mathbf{Z}[P]} \text{Spec } \mathbf{Z}[P \oplus \mathbf{N}]$  et où la log structure de  $V$  est celle associée à  $P \oplus \mathbf{N}$ .

Remarquant que, pour cette définition, une courbe log semistable n'est pas nécessairement un morphisme semistable de log schémas, car la log structure n'est pas nécessairement supposée verticale ici. Une courbe log semistable est log lisse et saturée (être une courbe log semistable équivaut en fait à être log lisse, saturé et purement de dimension relative 1).

Le morphisme de schéma sous-jacent  $\mathring{X} \rightarrow \mathring{S}$  à une courbe log semistable (resp. strictement log semistable) est une courbe semistable (resp. strictement semistable). En particulier, si  $\mathring{S}$  est un point géométrique, on peut associer à  $X$  un graphe  $\mathbb{G}(X)$  de la façon suivante : les sommets sont les composantes irréductibles de  $\mathcal{X}_s$ , les arêtes sont les points doubles. Les deux branches d'une arête  $e$  aboutissent aux sommets correspondant aux composantes irréductibles contenant le point double correspondant à  $e$ .

Soit  $X \rightarrow S$  une courbe propre log semistable et soit  $X' \rightarrow X$  un revêtement két. Alors pour tout point log géométrique  $\bar{s}$  de  $S$ , il existe un voisinage két  $U$  de  $\bar{s}$  tel que  $X'_U \rightarrow U$  soit saturé. Alors  $X'_U \rightarrow U$  est aussi une courbe log semistable.

Le morphisme  $\mathcal{X}'_{\bar{s}} \rightarrow \mathcal{X}_{\bar{s}}$  induit un vrai morphisme  $\mathbb{G}(X_{\bar{s}}) \rightarrow \mathbb{G}(X'_{\bar{s}})$  de graphes.

Soit  $K$  un corps complet non archimédien de corps résiduel séparablement clos. Soit  $O_K$  l'anneau des entiers de  $K$ . Soit  $X \rightarrow O_K$  une courbe semistable propre avec fibre générique lisse, il existe un plongement canonique  $|\mathbb{G}(X)| \rightarrow X_{\eta}^{\text{an}}$  qui est une équivalence d'homotopie. Il est compatible aux extensions isométriques de  $K$ .

De plus, si  $U$  est un ouvert de Zariski dense de  $X_{\eta}$ ,  $|\mathbb{G}(X)|$  s'envoie dans  $U^{\text{an}}$  et  $|\mathbb{G}(X)| \rightarrow U^{\text{an}}$  est encore une équivalence d'homotopie.

Si  $X \rightarrow O_K$  est une courbe log semistable et  $X' \rightarrow X$  est un morphisme két tel que  $X'$  soit encore une courbe log semistable, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} |\mathbb{G}(X')| & \rightarrow & X'^{\text{an}}_{\eta} \\ \downarrow & & \downarrow \\ |\mathbb{G}(X)| & \rightarrow & X^{\text{an}}_{\eta} \end{array}$$

### 6.2.2 Cospécialisation topologique des courbes semistables

Soit  $f : X \rightarrow Y$  une courbe semistable, et soit  $\bar{y}_2 \rightarrow \bar{y}_1$  une spécialisation de points géométriques de  $Y$ . Dans cette section, nous définirons un morphisme de cospécialisation entre graphes associés  $\mathbb{G}(X_{\bar{y}_1}) \rightarrow \mathbb{G}(X_{\bar{y}_2})$ .

Si  $x$  est un point de  $X$ , nous noterons  $X(x)$  le localisé de  $X$  en  $x$ .

**Lemme 6.2.1.** *Supposons  $Y$  strictement local de point fermé  $y_1$ , et  $X \rightarrow Y$  strictement semistable. Soit  $x$  un nœud ou un point générique de  $X_{y_1}$ . Alors  $X(x)_{y_2}$  est soit contenu dans le lieu lisse d'une composante géométriquement irréductible (qu'on notera  $F(x)$ ) de  $X_{y_2}$  ou contient un unique point double (qu'on notera  $F(x)$ ) de  $X_{y_2}$ , qui est un point rationnel.*

*Démonstration.* Quitte à remplacer  $Y$  par un sous-schéma fermé, on peut supposer que  $Y$  est intègre et que  $y_2$  est le point générique de  $Y$ .

- (i) Si  $x$  est dans le lieu lisse de  $X_{y_1}$ ,  $X \rightarrow Y$  est lisse en  $x$ , et  $X(x)_{y_2}$  est géométriquement connexe par 0-acyclicité locale des morphismes lisses.
- (ii) Si  $x$  est un nœud, on peut supposer que  $Y = \text{Spec } A$  et  $f$  se factorise à travers un morphisme étale  $X \rightarrow \text{Spec } B$  avec  $B = A[u, v]/(uv - a)$  et  $a(y_1) = 0$ .  
Si  $a = 0$ , posons  $Z := X \times_{\text{Spec } B} \text{Spec } A$  où  $g : B \rightarrow A$  est défini par  $g(u) = g(v) = 0$  ( $Z$  est le sous-schéma fermé réduit de  $X$  défini par les nœuds ; en particulier  $Z_{y_2}$  est l'union de tout les nœuds de  $X_{y_2}$ ).  $Z \rightarrow Y$  est étale et donc  $Z(x) \rightarrow Y$  est un isomorphisme puisque  $Y$  est strictement local. Ainsi  $Z(x)_{y_2}$  est juste un point rationnel  $F(x)$ .  
Si  $a \neq 0$ ,  $X_{y_2}$  est lisse. Le morphisme  $X \rightarrow Y$  est séparable (c'est-à-dire plat à fibre géométrique réduite) et donc localement 0-acyclique.  $X(x)_{y_2}$  est donc géométriquement connexe.

□

Puisque  $F(x)$  est géométriquement irréductible, nous écrirons aussi  $F(x)$  pour la composante irréductible ou le nœud correspondant de  $X_{\bar{y}_2}$ .

Si  $\phi : X' \rightarrow X$  est un morphisme fini et ouvert de courbes strictement semistables sur  $Y$  qui, fibre à fibre, envoie nœud sur nœud, alors  $\phi F' = F\phi$ . En effet  $\phi(x)$  est dans l'adhérence de  $\phi F'(x)$ , donc  $F\phi(x)$  est dans l'adhérence de  $\phi F'(x)$ . Il suffit donc de vérifier que si  $F\phi(x)$  est un point double,  $\phi F'(x)$  aussi. Supposons que  $F\phi(x)$  soit un point double de  $X_{y_2}$ . Soient  $z_1$  et  $z_2$  les deux points génériques des composantes irréductibles de  $X_{y_2}$  dont l'adhérence contient  $F\phi(x)$  (et donc aussi  $\phi(x)$ ). Comme  $\phi$  est ouvert, il existe  $z'_1$  et  $z'_2$  dans  $X(x)_{y_2}$  tels que  $\phi(z'_1) = z_1$  et  $\phi(z'_2) = z_2$ . Donc  $X(x)_{y_2}$  ne peut pas être contenu dans une seule composante irréductible de  $X_{y_2}$ , et donc  $F'(x)$  est un point double de  $X'_{y_2}$ . Par hypothèse,  $\phi F'(x)$  est bien un point double de  $X_{y_2}$ .

**Corollaire 6.2.2.** *Il existe un unique morphisme généralisé de graphes*

$$\psi : \mathbb{G}(X_{\bar{y}_1}) \rightarrow \mathbb{G}(X_{\bar{y}_2})$$

qui est

- fonctoriel pour les morphismes étales  $X' \rightarrow X$ ,
- compatible aux changements de bases  $Y' \rightarrow Y$ ,
- tel que si  $f : X \rightarrow Y$  est strictement semistable et  $Y$  est strictement local de point spécial  $\bar{y}_1$ ,  $\psi(x) = F(x)$  pour tout nœud ou point générique  $x$ .

*Démonstration.* Soit  $f : X \rightarrow Y$  une courbe strictement semistable, et soit  $\bar{y}_2 \rightarrow \bar{y}_1$  une spécialisation de points géométriques de  $Y$ .

On peut construire un morphisme généralisé  $\psi_{X/Y} : \mathbb{G}(X_{y_1}) \rightarrow \mathbb{G}(X_{y_2})$  en remplaçant  $Y$  par son localisé strict à  $\bar{y}_1$  et en posant  $\psi(x) := F(x)$ . Evidemment, si  $b$  est une branche de  $e$  dans  $\mathbb{G}(X_{y_1})$  qui aboutit en  $v$ ,  $\psi(e) \subset \psi(v)$ , d'où  $\psi(b)$  (qui est bien défini puisque  $X_{\bar{y}_2}$  est strictement semistable).

Ce morphisme généralisé est clairement compatible aux morphismes étales de courbes strictement semistables.

Si  $X \rightarrow Y$  est une courbe semistable, on peut choisir un recouvrement étale  $X' \rightarrow X$  tel que  $X' \rightarrow Y$  soit strictement semistable. Posons  $X'' := X' \times_X X'$ .



On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{G}(X''_{\bar{y}_1}) & \rightrightarrows & \mathbb{G}(X'_{\bar{y}_1}) & \rightarrow & \mathbb{G}(X_{\bar{y}_1}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \mathbb{G}(X''_{\bar{y}_2}) & \rightrightarrows & \mathbb{G}(X'_{\bar{y}_2}) & \rightarrow & \mathbb{G}(X_{\bar{y}_2}) \end{array}$$

Il existe un unique morphisme généralisé de graphes  $\psi : \mathbb{G}(X_{\bar{y}_1}) \rightarrow \mathbb{G}(X_{\bar{y}_2})$  rendant le diagramme commutatif.  $\square$

Ce morphisme généralisé de graphes n'est en général pas un vrai morphisme. En effet, si  $X$  est localement isomorphe à  $\text{Spec } A[u, v]/(uv - a)$  avec  $a(\bar{y}_1) = 0$  et  $a(\bar{y}_2) \neq 0$ , l'arête de  $\mathbb{G}(X_{\bar{y}_1})$  correspondant au point double  $u = v = 0$  s'envoie sur un sommet de  $\mathbb{G}(X_{\bar{y}_2})$ .

Les morphismes de cospécialisation de graphes sont aussi compatibles avec les morphismes ouverts et finis de courbes semistables qui envoient fibre à fibre les nœuds sur les nœuds (cela découle de la compatibilité avec  $F$ ).

De plus si  $\bar{y}_3 \rightarrow \bar{y}_2 \rightarrow \bar{y}_1$  sont des spécialisations,  $\psi_{\bar{y}_3 \rightarrow \bar{y}_1} = \psi_{\bar{y}_3 \rightarrow \bar{y}_2} \psi_{\bar{y}_2 \rightarrow \bar{y}_1}$ .

On veut savoir quand ce morphisme généralisé de graphes est un isomorphisme.

**Proposition 6.2.3.** *Si  $\psi : \mathbb{G}(X_{\bar{y}_1}) \rightarrow \mathbb{G}(X_{\bar{y}_2})$  est un vrai morphisme de graphes et  $f$  est propre, alors  $\psi$  est un isomorphisme.*

*Démonstration.* On peut supposer que  $Y = \text{Spec } A$  est strictement local et intègre de point spécial  $y_1$  et de point générique  $y_2$ .

L'hypothèse signifie que localement pour la topologie étale de la fibre spéciale (et donc sur  $X$  par propriété),  $X$  est isomorphe à  $\text{Spec } A[u, v]/uv$  ou est lisse. En effet si  $X$  est localement isomorphe à  $\text{Spec } A[u, v]/uv - a$  avec  $a \notin A^*$ , la fibre spéciale a un point double, correspondant à une arête  $e$ . Alors  $\psi(e)$  est une arête, correspondant à un point double et donc  $\text{Spec } \text{Frac}(A)[u, v]/uv - a$  est non lisse, et donc  $a = 0$ .

Soit  $Z \subset X$  le lieu non lisse de  $X \rightarrow Y$ , muni de la structure de sous-schéma réduit.  $Z \rightarrow Y$  est étale (comme on peut le voir localement sur la topologie étale de  $X$ ), et propre. On obtient ainsi que  $F$  induit une bijection entre les nœuds de  $X_{\bar{y}_1}$  et ceux de  $X_{\bar{y}_2}$ .

Soit  $\tilde{X}$  l'éclaté de  $X$  le long de  $Z$ . Quand  $X = \text{Spec } A[u, v]/(uv)$ ,  $Z$  est défini par l'idéal engendré par  $u$  et  $v$ , et  $\tilde{X} = \text{Spec } A[u] \amalg \text{Spec } A[v]$ .

Ainsi en regardant localement sur  $X$  pour la topologie étale, on voit que  $\tilde{X}$  est lisse sur  $Y$ , et que  $\tilde{X}_y$  est simplement le normalisé de  $X_y$ .

Puisqu'on suppose  $X \rightarrow Y$  propre,  $\tilde{X} \rightarrow Y$  est lisse et propre, donc sa factorisation de Stein est étale sur  $Y$  et donc induit une bijection entre les composantes connexes de  $\tilde{X}_{\bar{y}_1}$  et celles de  $\tilde{X}_{\bar{y}_2}$ , et donc la fonction entre les composantes irréductibles de  $\tilde{X}_{\bar{y}_1}$  et celles de  $\tilde{X}_{\bar{y}_2}$  est aussi une bijection.  $\square$

**Proposition 6.2.4.** *Soit  $f : X \rightarrow Y$  une courbe log semistable, et  $\bar{y}_2 \rightarrow \bar{y}_1$  une spécialisation de points log géométriques. Supposons que  $\overline{M}_{\bar{y}_1} \rightarrow \overline{M}_{\bar{y}_2}$  est un isomorphisme. Alors  $\psi : \mathbb{G}(X_{\bar{y}_1}) \rightarrow \mathbb{G}(X_{\bar{y}_2})$  est un vrai morphisme de graphes.*

*Démonstration.* On peut supposer  $Y$  strictement local, intègre de point générique  $y_2 : Y = \operatorname{Spec} A$ , et soit  $P \rightarrow A$  une carte.

Pour montrer que c'est un vrai morphisme, il suffit de montrer que  $\psi(e)$  est une arête si  $e$  est une arête de  $\mathbb{G}(X_{y_1})$ . Cette propriété n'est pas modifiée par un morphisme étale, et donc on peut supposer  $X = \operatorname{Spec} A \otimes_{\mathbb{Z}[P]} \mathbb{Z}[Q]$  avec  $Q = (P \oplus \langle u, v \rangle) / (u \cdot v = p)$  et  $p \in P$ , tel que l'image de  $p$  dans  $M_{\bar{y}_1}$  soit non inversible. Alors l'image de  $p$  dans  $M_{\bar{y}_2}$  est non inversible et donc  $X = \operatorname{Spec} A[u, v] / (uv = 0)$ , ce qui donne le résultat voulu.  $\square$

### 6.2.3 Cospécialisation topologique et revêtements két

Soit  $f : X \rightarrow Y$  une courbe log semistable et propre. Soit  $\bar{y}_2 \rightarrow \bar{y}_1$  une spécialisation de points log géométriques.

Soit  $S_0 \rightarrow X_{\bar{y}_1}$  un revêtement két log géométrique.

Alors il s'étend au-dessus d'un voisinage két  $U$  de  $\bar{y}_1$  en un revêtement két  $S \rightarrow X_U$ . Quitte à localiser encore pour la topologie két, on peut même supposer que  $S \rightarrow X_U$  est une courbe log semistable.

On peut donc utiliser le corollaire 6.2.2 et obtenir un morphisme généralisé de graphes  $\mathbb{G}(S_{\bar{y}_1}) \rightarrow \mathbb{G}(S_{\bar{y}_2})$ . Cela ne dépend pas du choix de  $U$  ni de  $S$  puisque deux extensions de  $S_0$  sur un voisinage két de  $\bar{y}_1$  sont isomorphes sur un voisinage két plus petit et cet isomorphisme est unique à localisation két supplémentaire près.

Si  $S'_0 \rightarrow S_0$  est un revêtement két, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{G}(S'_{\bar{y}_1}) & \rightarrow & \mathbb{G}(S'_{\bar{y}_2}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{G}(S_{\bar{y}_1}) & \rightarrow & \mathbb{G}(S_{\bar{y}_2}) \end{array}$$

Si  $\bar{M}_{Y, y_1} \rightarrow \bar{M}_{Y, y_2}$  est un isomorphisme,  $\bar{M}_{U, y_1} \rightarrow \bar{M}_{U, y_2}$  est encore un isomorphisme, donc on peut encore appliquer la proposition 6.2.4 à  $S$ .

### 6.2.4 Cospécialisation du groupe fondamental tempéré

Supposons  $p \notin \mathbb{L}$ . Soit  $Y \rightarrow O_K$  un morphisme de fs log schémas et  $X \rightarrow Y$  une courbe propre log semistable.

Soit  $Y_{\text{tr}}$  (resp.  $U := X_{\text{tr}}$ ) le lieu ouvert de  $Y$  (resp.  $X$ ) où la log structure est triviale ( $Y_{\text{tr}} \subset Y_\eta$ ). Soit  $\mathfrak{Y}$  le complété de  $Y$  le long de sa fibre spéciale.

Soit  $\mathcal{Y} = \mathfrak{Y}_\eta \cap Y_{\text{tr}}^{\text{an}}$ , c'est un sous-domaine analytique de  $Y^{\text{an}}$ .

Rappelons qu'une spécialisation (két)  $\bar{x}_1 \rightarrow \bar{x}_2$  de points log géométrique d'un log schéma fs  $X$  est un morphisme entre les log strictes localisations  $X(\bar{x}_1) \rightarrow X(\bar{x}_2)$  (cf. § 1.3.2).

**Définition 6.2.3.** On note  $\operatorname{Pt}^{\text{an}}(Y)$  la catégorie dont les objets sont les points géométriques  $\bar{y}$  de  $Y_{\text{tr}}^{\text{an}}$  tels que  $\mathcal{H}(y)$  soit à valuation discrète (où  $y$  est le point sous-jacent à  $\bar{y}$ ) et où  $\operatorname{Hom}_{\operatorname{Pt}^{\text{an}}(Y)}(\bar{y}, \bar{y}')$  est l'ensemble des spécialisations két de  $Y_k$  de la log réduction  $\bar{y}_s$  de  $\bar{y}$  à la log réduction  $\bar{y}'_s$  de  $\bar{y}'$ .

**Théorème 6.2.5.** *Pour tout morphisme  $\bar{y}_2 \rightarrow \bar{y}_1$  dans  $\text{Pt}^{\text{an}}(Y)$ , il existe un morphisme de cospécialisation*

$$\pi_1^{\text{temp}}(U_{\bar{y}_1})^{\mathbb{L}} \rightarrow \pi_1^{\text{temp}}(U_{\bar{y}_2})^{\mathbb{L}}$$

*qui est un isomorphisme si  $\overline{M}_{\bar{y}_{1,s}} \rightarrow \overline{M}_{\bar{y}_{2,s}}$  est un isomorphisme.*

*Démonstration.* Soit  $\bar{y}_2 \rightarrow \bar{y}_1$  un morphisme de  $\text{Pt}^{\text{an}}(Y)$ .

Il y a un diagramme 2-commutatif de foncteurs de cospécialisation :

$$\begin{array}{ccc} \text{KCov}_{\text{géom}}(X_{\bar{y}_{1,s}})^{\mathbb{L}} & \rightarrow & \text{KCov}_{\text{géom}}(X_{\bar{y}_{2,s}})^{\mathbb{L}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Cov}^{\text{alg}}(U_{\bar{y}_1})^{\mathbb{L}} & \rightarrow & \text{Cov}^{\text{alg}}(U_{\bar{y}_2})^{\mathbb{L}} \end{array}$$

Les flèches verticales sont des équivalences ([27, prop. 1.15]) et la flèche du bas aussi ([17, XIII.2.10]).

Soit  $S_{1,s}$  un revêtement két log géométrique de  $X_{\bar{y}_{1,s}}$  et soit  $S_{2,s}$  (resp.  $S_1, S_2$ ) le revêtement correspondant de  $X_{\bar{y}_{2,s}}$  (resp.  $U_{\bar{y}_1}, U_{\bar{y}_2}$ ).

Il y a des applications fonctorielles en  $S$  :

$$|S_1^{\text{an}}| \leftarrow |\mathbb{G}(S_{1,s})| \rightarrow |\mathbb{G}(S_{2,s})| \rightarrow |S_2^{\text{an}}|$$

la première et la troisième flèche étant les plongements du squelette d'une courbe semistable. Ce sont des équivalences d'homotopie.

On obtient donc un morphisme de types d'homotopie  $|S_1^{\text{an}}| \rightarrow |S_2^{\text{an}}|$ , fonctoriel en  $S$ .

Rappelons que, si  $Z$  est une variété analytique,  $\mathcal{D}_{\text{top}}(Z)/\text{Cov}^{\text{alg}}(Z)^{\mathbb{L}}$  est la catégorie fibrée dont la fibre en un revêtement  $\mathbb{L}$ -fini  $T \rightarrow Z$  est la catégorie des revêtements topologiques de  $T$  et  $\mathcal{D}_{\text{temp}}(Z)^{\mathbb{L}}/\text{Cov}^{\text{alg}}(Z)^{\mathbb{L}}$  est la catégorie fibrée dont la fibre en  $T$  est la catégorie des revêtements tempérés de  $T$ . Rappelons également que  $\mathcal{D}_{\text{temp}}(Z)^{\mathbb{L}}/\text{Cov}^{\text{alg}}(Z)^{\mathbb{L}}$  est le champ associé à  $\mathcal{D}_{\text{top}}(Z)/\text{Cov}^{\text{alg}}(Z)^{\mathbb{L}}$ .

Le morphisme fonctoriel  $|S_1^{\text{an}}| \rightarrow |S_2^{\text{an}}|$  de types d'homotopie fournit un foncteur de catégories fibrées :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_{\text{top}}(U_{\bar{y}_2}) & \rightarrow & \mathcal{D}_{\text{top}}(U_{\bar{y}_1}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Cov}^{\text{alg}}(U_{\bar{y}_2})^{\mathbb{L}} & \simeq & \text{Cov}^{\text{alg}}(U_{\bar{y}_1})^{\mathbb{L}} \end{array}$$

qui induit un foncteur de champs :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_{\text{temp}}(U_{\bar{y}_2})^{\mathbb{L}} & \rightarrow & \mathcal{D}_{\text{temp}}(U_{\bar{y}_1})^{\mathbb{L}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Cov}^{\text{alg}}(U_{\bar{y}_2})^{\mathbb{L}} & \simeq & \text{Cov}^{\text{alg}}(U_{\bar{y}_1})^{\mathbb{L}} \end{array}$$

En prenant les sections globales, on obtient un foncteur :

$$\text{Cov}^{\text{temp}}(U_{\bar{y}_2})^{\mathbb{L}} \rightarrow \text{Cov}^{\text{temp}}(U_{\bar{y}_1})^{\mathbb{L}}.$$

Cela induit un morphisme de cospécialisation de groupes fondamentaux tempérés :

$$\pi_1^{\text{temp}}(U_{\bar{y}_1})^{\mathbb{L}} \rightarrow \pi_1^{\text{temp}}(U_{\bar{y}_2})^{\mathbb{L}}.$$

□

## 6.3 Cospécialisation du groupe fondamental $(p')$ -tempéré

Revenons au cas d'une log fibration polystable propre  $X \rightarrow Y$ , telle que  $Y$  soit log lisse et propre sur  $O_K$  (la propriété de  $Y \rightarrow O_K$  est seulement supposée ici afin que tout point de  $Y_\eta$  ait une réduction dans  $Y_s$ , mais la construction que nous ferons sera locale sur  $Y$ ). Dans ce paragraphe, nous construisons des morphismes de cospécialisation pour le groupe fondamental  $(p')$ -tempéré des fibres géométriques de  $X_\eta \rightarrow Y_\eta$ . Grâce au théorème 5.2.3, nous nous sommes réduits à construire des morphismes de cospécialisation pour les groupes fondamentaux  $(p')$ -tempérés des fibres log géométriques de  $X_s \rightarrow Y_s$ . Soit donc  $\bar{s}_2 \rightarrow \bar{s}_1$  une spécialisation de points log géométriques de  $Y$ , où  $\bar{s}_1$  et  $\bar{s}_2$  sont les réductions de points géométriques  $\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2$  de  $Y_\eta$ .

Pour comparer les groupes fondamentaux tempérés, nous aurons d'abord besoin de comparer les groupes fondamentaux logarithmiques. Ainsi nous montrerons que tout revêtement két géométrique de  $X_{s_1}$  s'étend à  $X_U$  pour un certain voisinage két  $U$  de  $s_1$  dans le localisé  $Z$  en  $s_1$  de  $Y$ .

Ceci découle de [36] si  $s_1$  est strict sur  $Y$ . Ainsi nous n'avons qu'à montrer l'invariance du groupe fondamental log géométrique pro- $(p')$  par changement de point de base. Ceci nous donnera un morphisme de spécialisation du groupe fondamental log géométrique de  $X_{s_1}$  vers celui de  $X_{s_2}$ , qui sera un isomorphisme (par comparaison aux groupes fondamentaux de  $X_{\bar{\eta}_1}$  et de  $X_{\bar{\eta}_2}$ ).

Nous avons maintenant une équivalence entre les revêtements két géométriques pro- $(p')$  de  $X_{\eta_1}$  et de  $X_{\eta_2}$ . Nous devons comparer, pour tout tel revêtement két  $Z_{s_1}$  correspondant à  $Z_{s_2}$  (qui s'étend à  $Z_U$ ), leurs ensembles polysimpliciaux, définis dans 5.1.6. Nous supposons que  $s_2$  est le point générique de sa strate (si  $s_1$  et  $s_2$  sont dans la même strate et  $C_{\text{géom}}(X_{s_2})$  est intérieurement libre, il s'avérera que  $C_{\text{géom}}(X_{s_1}) \rightarrow C_{\text{géom}}(X_{s_2})$  est un isomorphisme. Ainsi on pourra remplacer  $s_2$  par le point générique de sa strate). Nous construisons le morphisme de cospécialisation d'ensembles polysimpliciaux localement pour la topologie étale. Ainsi nous pourrions supposer  $X$  strictement polystable (la propriété n'est pas nécessaire ici). Ce morphisme de cospécialisation d'ensembles polysimpliciaux sera construit en associant, après localisation két de la base pour que  $Z_U$  devienne saturé, à une strate  $z$  de  $Z_{s_1}$  la strate minimale  $z'$  de  $Z_{s_2}$  telle que  $z$  soit dans la clôture de  $z'$  (comme dans le lemme 1.4.2). Alors la clôture de  $z'$  dans le localisé strict du point générique de  $z$  est séparable sur son image. Ainsi  $z'$  est géométriquement connexe et définit donc une strate géométrique de  $X_{s_2}$ .

Nous terminerons en recollant notre isomorphisme de spécialisation du groupe fondamental log géométrique pro- $(p')$  avec notre morphisme de cospécialisation d'ensembles polysimpliciaux en un morphisme de cospécialisation de groupes fondamentaux tempérés.

### 6.3.1 Cospécialisation d'ensembles polysimpliciaux

Dans cette section, nous construisons un morphisme de cospécialisation d'ensembles polysimpliciaux pour la composée d'un morphisme két et d'une log fibration polystable.

On a un résultat analogue à [7, prop 2.9] :

**Proposition 6.3.1.** *Soit  $Z' \rightarrow Z$  un morphisme strictement plurinodal de log schémas fs, et  $Z'' \rightarrow Z'$  un morphisme két de log schémas. Soit  $z_1$  et  $z_2$  deux strates de  $Z$  (muni de la log structure image inverse  $Z$ ), tel que  $z_2 \leq z_1$  (c'est-à-dire  $z_1 \in \overline{\{z_2\}}$ ). Alors on a un morphisme de cospécialisation  $\text{Str}(Z''_{z_1}) \rightarrow \text{Str}(Z''_{z_2})$  qui envoie une strate  $x_1$  de  $\text{Str}(Z''_{z_1})$  vers l'unique élément maximal de  $\{x_2 \in \text{Str}(Z''_{z_2}) \mid x_1 \in \bar{x}_2\}$ .*

*Le morphisme de cospécialisation envoie les points minimaux vers les points minimaux.*

*Si  $z_3 \leq z_2 \leq z_1$ , le triangle évident de morphismes de cospécialisation est commutatif.*

*Démonstration.* Comme pour [7, prop 2.9], si le résultat est vrai pour deux morphismes  $\phi : Z'' \rightarrow Z'$  et  $\psi : Z' \rightarrow Z$ , alors il est aussi vrai pour  $\psi \circ \phi$  car  $\text{Str}(Z''_z) = \coprod_{z' \in \text{Str}(Z'_z)} \text{Str}(Z''_{z'})$ . Mais il est vrai si  $\psi$  est strictement plurinodal ([7, prop 2.9]), et c'est aussi vrai pour  $\phi$  két d'après (5.1.5).  $\square$

**Définition 6.3.1.** Un couple de points ( $z_2 \leq z_1$ ) d'un Zariski log schéma fs  $Z$  est un *bon couple* si il existe un voisinage  $U$  de  $z_1$  et une carte fs  $U \rightarrow \text{Spec } \mathbf{Z}[P]$  telle que si  $\mathfrak{p}$  est l'image de  $z_2$  dans  $\text{Spec } P$  par  $U \rightarrow \text{Spec } P$ , et si  $F = P \setminus \mathfrak{p}$ , le schéma réduit  $\{z_2\}$  muni de la log structure associée à  $F$  (ce log schéma sera noté  $\{z_2\}_F$ ) par le morphisme

$$\overline{\{z_2\}} \rightarrow \text{Spec } k[P]/k[\mathfrak{p}] \simeq \text{Spec } k[F]$$

est log régulier.

Une spécialisation de points géométriques (resp. de points log géométriques) ( $\bar{z}_2 \rightarrow \bar{z}_1$ ) d'un log schéma fs  $Z$  est un *bon couple* si il existe un voisinage étale (resp. két)  $U$  de  $\bar{z}_1$  tel que  $U$  ait une carte globale (et donc soit Zariski) et le couple ( $z_2 \leq z_1$ ) de points sous-jacents de  $U$  est un bon couple.

Un couple de points ( $z_2 \leq z_1$ ) est un bon couple si  $z_2$  est le point générique d'une strate d'un log schéma fs Zariski log régulier ([26, prop. 7.2]).

**Lemme 6.3.2.** *Soit  $Z' \rightarrow Z$  un morphisme strictement plurinodal de log schémas fs, soit  $(z_2, z_1)$  un bon couple de points de  $Z$ . Soit  $z'_2$  (respectivement  $z'_1$ ) le point générique d'une strate de  $Z'_{z_2}$  (respectivement  $Z'_{z_1}$ ), tel que  $z'_2 \leq z'_1$ . Alors  $(z'_2, z'_1)$  est un bon couple de points de  $Z'$ .*

*Démonstration.* Comme l'assertion est locale sur  $Z$  et comme la log régularité est stable par changement de base étale, on peut supposer que l'on a une carte fs  $(\phi : P \rightarrow Q)$  de  $Z \rightarrow Z'$  telle que le carré

$$\begin{array}{ccc} Z' & \rightarrow & \text{Spec } \mathbf{Z}[Q] \\ \downarrow & \square & \downarrow \\ Z & \rightarrow & \text{Spec } \mathbf{Z}[P] \end{array}$$

soit cartésien.

Soit  $\mathfrak{p}$  (respectivement  $\mathfrak{q}$ ) l'idéal de  $P$  (respectivement  $Q$ ) qui est l'image de  $z_1$  (respectivement  $z_2$ ) et soit  $F = P \setminus \mathfrak{p}$  (respectivement  $F' = Q \setminus \mathfrak{q}$ ) la face

associée. On veut montrer que  $\overline{\{z_1'\}}$  muni de la log structure associée à  $F'$  est log régulier.

On a  $F = \phi^{-1}(F')$ ,  $\text{Ker } \phi|_F^{\text{gp}} \subset \text{Ker } \phi^{\text{gp}}$  et  $\text{Coker } \phi|_F^{\text{gp}} \subset \text{Coker } \phi^{\text{gp}}$ , donc  $\phi|_F : F \rightarrow F'$  est aussi un morphisme log lisse de monoïdes.

Notons  $\mathbf{Z}[\mathfrak{p}] := \{\sum_{p \in \mathfrak{p}} a_p p, a_p \in \mathbf{Z}\} \subset \mathbf{Z}[P]$  (c'est un idéal premier de  $\mathbf{Z}[P]$ ).

Le diagramme suivant de schémas est commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} \text{Spec } \mathbf{Z}[F'] & \simeq & \text{Spec } \mathbf{Z}[Q]/\mathbf{Z}[\mathfrak{q}] & \rightarrow & \text{Spec } \mathbf{Z}[Q] \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec } \mathbf{Z}[F] & \simeq & \text{Spec } \mathbf{Z}[P]/\mathbf{Z}[\mathfrak{p}] & \rightarrow & \text{Spec } \mathbf{Z}[P] \end{array}$$

Ainsi

$$\begin{array}{ccc} \overline{\{z_1'\}} & \rightarrow & \text{Spec } \mathbf{Z}[F'] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \overline{\{z_1\}} & \rightarrow & \text{Spec } \mathbf{Z}[F] \end{array}$$

est commutatif. Soit  $Z'' = \overline{\{z_1\}} \times_{\text{Spec } \mathbf{Z}[F]} \text{Spec } \mathbf{Z}[F']$  et munissons-le de la log structure associée à  $F'$ . Puisque  $Z'' \rightarrow \overline{\{z_1\}}_F$  est log lisse et  $\overline{\{z_1\}}_F$  est log régulier,  $Z''$  est log régulier ([26, th. 8.2]).

On a un morphisme de log schémas  $\overline{\{z_1'\}} \rightarrow Z''$  qui est l'immersion fermée d'une composante irréductible (car  $Z''$  est la préimage de  $\overline{\{q\}}$  dans  $Z'_{\{z_1\}}$  et  $z_1'$  est un point générique de  $\overline{\{q\}}$  dans  $Z'_{z_1}$  par définition d'une strate), qui induit un morphisme strict de log schémas  $\overline{\{z_1'\}}_{F'} \rightarrow Z''$ . Ainsi, comme  $Z''$  est log régulier (et donc normal),  $\overline{\{z_1'\}}_{F'}$  est une composante connexe de  $Z''$  et donc est aussi log régulier.  $\square$

**Lemme 6.3.3.** *Soit  $\phi : Z' \rightarrow Z$  un morphisme strictement plurinodal de log schémas fs. Soit  $(z_2, z_1)$  un bon couple de points de  $Z$ .*

*On a un morphisme de cospécialisation  $\text{Str}(Z'_{z_1}) \rightarrow \text{Str}(Z'_{z_2})$  qui envoie une strate  $x_1$  de  $\text{Str}(Z'_{z_1})$  vers l'unique élément maximal de  $\{x_2 \in \text{Str}(Z'_{z_2}) | x_1 \in \bar{x}_2\}$ . Le morphisme de cospécialisation envoie les éléments minimaux vers les éléments minimaux.*

*Si  $z_3 \leq z_2 \leq z_1$ , le diagramme évident de morphismes de cospécialisation est commutatif.*

*Démonstration.* C'est clairement vrai si  $\phi$  est un morphisme plurinodal standard  $\text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$  avec  $f : P \rightarrow A$  une carte  $\text{Spec } A$  et  $B = A[u, v]/(uv - f(a))$  où  $a \in M$  (on peut par exemple utiliser [7, lem 2.3]).

D'après le lemme (6.3.2), on voit, comme dans la preuve de [7, prop. 2.9], que si la proposition est vraie pour  $\phi$  et  $\phi'$ , elle est vraie pour  $\phi \circ \phi'$ . De plus le résultat est local pour la topologie de Zariski de  $Z'$ , donc il n'y a à montrer le résultat que pour  $\phi$  étale, mais cela découle alors de (5.1.4) et du fait que  $\overline{\{z_2\}}$  est normal dans un voisinage de  $z_1$  et les adhérences dans  $Z' \times_Z \overline{\{z_2\}}$  de deux points différents de  $Z_{z_2}$  (qui sont deux composantes irréductibles de  $Z' \times_Z \overline{\{z_2\}}$ , qui est normal) ont une intersection vide.  $\square$

*Remarque.* Supposons toujours que  $(z_2, z_1)$  est un bon couple. Si l'on a un morphisme két  $Z'' \rightarrow Z'$  tel que  $Z'' \rightarrow Z$  soit aussi strictement plurinodal,

alors, comme pour [7, cor. 2.11], le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Str}(Z''_{z_1}) & \rightarrow & \mathrm{Str}(Z''_{z_2}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Str}(Z'_{z_1}) & \rightarrow & \mathrm{Str}(Z'_{z_2}) \end{array}$$

est commutatif.

Si  $Z' \rightarrow Z$  est un morphisme strictement polystable, il induit (comme dans [7, lem. 6.1]) un morphisme de complexes polysimpliciaux

$$C(Z'_{z_1}) \rightarrow C(Z'_{z_2}).$$

Si maintenant  $Z' \rightarrow \cdots \rightarrow Z$  est une fibration strictement polystable, en utilisant le lemme 6.3.2, on construit par récurrence sur la longueur de la fibration un morphisme de complexes polysimpliciaux :

$$C(Z'_{z_1}) \rightarrow C(Z'_{z_2}).$$

*Remarque.* Le morphisme  $Z' \rightarrow Z$  est saturé, donc pour toute extension  $z'_1$  két de  $\bar{z}_1$ ,  $Z'_{z'_1} \rightarrow Z'_{\bar{z}_1}$  est un isomorphisme sur les schémas sous-jacents et donc on même strates et donc même complexe polysimplicial. En particulier, si  $s_1$  est un log point géométrique de  $Z$  au-dessus de  $\bar{z}_1$ , le morphisme  $C_{\mathrm{g\acute{e}om}}(Z'_{\bar{z}_1}/s_1) \rightarrow C(Z'_{\bar{z}_1})$  est un isomorphisme (et le même résultat est vrai pour  $z_2$ ).

Soit  $(\bar{z}_2 \rightarrow \bar{z}_1)$  un bon couple de points log géométriques de  $Z$ . Quitte à remplacer  $Z$  par sa stricte localisation  $Z_1$  en  $\bar{z}_1$  (et choisissons une bonne carte modelée sur  $P$  de  $Z_1$  en  $\bar{z}_1$ ), on obtient un morphisme  $\psi : \mathrm{Str}(Z'_{\bar{z}_1}) \rightarrow \mathrm{Str}(Z'_{z'_2})$ , où  $z'_2$  est l'image de  $\bar{z}_2$  dans le localisé strict de  $Z$  en  $\bar{z}_1$ .

Soit  $x_1$  le point générique d'une strate  $\tilde{x}_1$  de  $Z'_{\bar{z}_1}$ , et soit  $Z'_1$  le localisé de  $Z'_{\bar{z}_1}$  en  $x_1$  et soit  $Z''_1$  la clôture de  $\psi(x_1)$  dans  $Z'_1$  ( $x_1$  est encore dans  $Z'_1$ ).

Étale localement dans un voisinage de  $x_1$ ,  $Z' \rightarrow Z$  est isomorphe au pullback à  $Z$  de  $\mathrm{Spec} \mathbf{Z}[Q] \rightarrow \mathrm{Spec} \mathbf{Z}[P]$  où  $P \rightarrow Q$  est un morphisme saturé. Donc le morphisme de la clôture d'une strate  $\{\overline{x_2}\}$  de  $Z'_{z'_2}$  vers son image  $Z_0$  est étale localement isomorphe au pullback à  $Z_0$  de  $\mathrm{Spec} \mathbf{Z}[F'] \rightarrow \mathrm{Spec} \mathbf{Z}[F]$  où  $F'$  est la face de  $Q$  correspondant à  $x_2$  et  $F$  est la face préimage de  $F'$  dans  $P$ . Alors  $F \rightarrow F'$  est aussi un morphisme saturé de monoïdes grâce à 1.3.2. En particulier  $\mathrm{Spec} \mathbf{Z}[F'] \rightarrow \mathrm{Spec} \mathbf{Z}[F]$  est un morphisme séparable de schémas.

D'après [19, cor. 18.9.8], les fibres de  $Z'_1 \rightarrow Z_0$  sont géométriquement connexes.

En particulier la strate  $x_2$ , image de  $x_1$  par  $\psi : \mathrm{Str}(Z'_{\bar{z}_1}) \rightarrow \mathrm{Str}(Z'_{z'_2})$  est géométriquement connexe, définissant ainsi une strate de  $\mathrm{Str}(Z'_{\bar{z}_2})$ .

On obtient ainsi un morphisme canonique  $\mathrm{Str}(Z'_{\bar{z}_1}) \rightarrow \mathrm{Str}(Z'_{\bar{z}_2})$  qui rend le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & & \mathrm{Str}(Z'_{\bar{z}_2}) \\ & \nearrow & \downarrow \\ \mathrm{Str}(Z'_{\bar{z}_1}) & \longrightarrow & \mathrm{Str}(Z'_{z'_2}) \end{array}$$

On obtient donc un morphisme de cospécialisation

$$C_{\mathrm{g\acute{e}om}}(Z'_{z_1}/z_1) \rightarrow C_{\mathrm{g\acute{e}om}}(Z'_{z_2}/z_2).$$

Si  $\underline{Z}' : Z' \rightarrow \cdots \rightarrow Z$  est maintenant une log fibration polystable, quitte à changer  $Z$  par un voisinage étale, il existe un morphisme étale surjectif  $\underline{Z}'' \rightarrow \underline{Z}'$  de log fibrations polystables au-dessus de  $Z$  tel que  $\underline{Z}''$  soit strictement polystable. Notons  $\underline{Z}''' = \underline{Z}'' \times_{\underline{Z}'} \underline{Z}$ . Comme  $C(\underline{Z}''') = \text{Coker}(C(\underline{Z}''') \rightrightarrows C(\underline{Z}'''))$ , en prenant le conoyau des flèches horizontales du diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} C(\underline{Z}''') & \rightrightarrows & C(\underline{Z}''') \\ \downarrow & & \downarrow \\ C(\underline{Z}''') & \rightrightarrows & C(\underline{Z}''') \end{array}$$

on obtient un morphisme de cospécialisation  $C(\underline{Z}'_{z_1}) \rightarrow C(\underline{Z}'_{z_2})$  (qui est fonctoriel vis-à-vis des morphismes étales).

Ces morphismes de cospécialisation commutent aux morphismes két de log fibrations polystables.

Si  $Z'' \rightarrow Z'$  est un morphisme két et  $Z' \rightarrow Z$  est une log fibration polystable et soit  $(\bar{z}_2 \rightarrow \bar{z}_1)$  un bon couple de points log géométriques.

**Proposition 6.3.4.** *Il existe un morphisme de cospécialisation canonique*

$$C_{\text{géom}}(\underline{Z}''_{z_1}/z_1) \rightarrow C_{\text{géom}}(\underline{Z}''_{z_2}/z_2),$$

fonctoriel en  $Z''$ .

Si l'on dispose d'un morphisme  $Z''' \rightarrow Z''$

*Démonstration.* Supposons  $Z' \rightarrow Z$  strictement polystable. Quitte à remplacer  $Z$  par un voisinage két de  $\bar{z}_1$  et à remplacer  $z_1$  et  $z_2$  par le sous-schéma réduit d'un revêtement galoisien két connexe dans  $\bar{z}_1$  et  $\bar{z}_2$ , on peut supposer que  $Z$  a une carte globale modelée sur  $M$ , qu'il existe un recouvrement étale  $(U'_i)_{i \in I}$  de  $Z'$  avec  $I$  fini, que  $U'_i$  est étale sur  $Z \times_{\text{Spec } \mathbf{Z}[M]} \text{Spec } \mathbf{Z}[P_i]$ ,  $Z''$  a un recouvrement étale  $(U''_i)_{i \in I}$  où  $U''_i$  est étale sur  $U'_i \times_{\text{Spec } \mathbf{Z}[P_i]} \text{Spec } \mathbf{Z}[Q_i]$  et où  $M \rightarrow Q_i$  est saturé. Ainsi il existe un morphisme  $(p')$ -Kummer de monoïdes  $Q_i \rightarrow P'_i$  tel que  $V_i = U''_i \times_{\text{Spec } \mathbf{Z}[Q_i]} \text{Spec } \mathbf{Z}[P'_i]$  s'insère dans une fibration polystable  $\underline{V}_i : V_i \rightarrow \cdots \rightarrow Z$  and  $\underline{V}_i \rightarrow \underline{U}'_i$  est un morphisme két de log fibrations polystables (en particulier  $V_i \rightarrow U''_i$  est un revêtement galoisien de groupe  $G = ((P'_i)^{\text{gp}}/Q_i^{\text{gp}})^{\vee}$ , et  $Z'' \rightarrow Z$  est saturé).

$C(V_{i,z_1}) \rightarrow C(V_{i,z_2})$  est  $G$ -équivariant, et donc induit un morphisme  $C(U''_{i,z_2}) = C(V_{i,z_2})/G \rightarrow C(V_{i,z_1})/G = C(U''_{i,z_1})$ . On déduit du fait que les morphismes de cospécialisation commutent avec les morphismes két de log fibrations polystables qu'il ne dépend pas du choix de  $V_i$  et qu'il se descend en un morphisme  $C(\underline{Z}''_{z_1}) \rightarrow C(\underline{Z}''_{z_2})$ .

En prenant la limite projective sur les voisinages étales stricts de  $\bar{z}_1$ , on obtient un morphisme  $C_{\text{géom}}(\underline{Z}''_{z_1}/z_1) \rightarrow C(\underline{Z}''_{z_2})$ , où  $z'_2$  est l'image de  $\bar{z}_2$  dans le localisé strict de  $Z$  en  $\bar{z}_1$ .

Si l'on a une strate log géométrique de  $\underline{Z}''_{z_1}$ , en utilisant [19, cor. 18.9.8] comme précédemment, on obtient que la strate image de  $\underline{Z}''_{z_2}$  est géométriquement connexe.

On obtient alors le morphisme voulu  $C_{\text{géom}}(\underline{Z}''_{z_1}/z_1) \rightarrow C_{\text{géom}}(\underline{Z}''_{z_2}/z_2)$ .



Si l'on a un morphisme  $Z''' \rightarrow Z''$ , on peut recouvrir  $Z'''$  par des ouverts étales  $U_i'''$  et  $Z''$  par des ouverts étales  $U_i''$  tels que  $U_i''' \rightarrow U_i''$  soient des revêtements két. Quitte à raffiner les familles  $(U_i'')$  et  $(U_i''')$ , on peut supposer qu'il existe une fibration strictement polystable  $\underline{V}_i$  et un revêtement két  $V_i \rightarrow U_i'''$ . De plus, quitte à raffiner encore les recouvrements, on peut supposer les revêtements galoisiens (puisque le groupe fondamental logarithmique d'un log schéma de schéma sous-jacent strictement local est commutatif). Soit  $G = \text{Gal}(V_i/U_i'')$  et  $H = \text{Gal}(V_i/U_i''')$ . Alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} C(V_{i,z_2})/H & \rightarrow & C(V_{i,z_1})/H \\ \downarrow & & \downarrow \\ C(V_{i,z_2})/G & \rightarrow & C(V_{i,z_1})/G \end{array}$$

est commutatif. On en déduit la functorialité par descente le long des recouvrements étales.

Si  $Z' \rightarrow Z$  n'est plus supposé strictement polystable, quitte à changer  $Z$  par un voisinage étale, il existe un morphisme étale  $Z'_0 \rightarrow Z'$  de log fibrations polystable sur  $Z$  telles que  $Z'_0 \rightarrow \cdots \rightarrow Z$  soit une log fibration strictement polystable. Soit  $Z'_1 = Z'_0 \times_{Z'} Z'_0$ . Alors, le morphisme voulu est obtenu en prenant le conoyau des flèches horizontales du carré commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} C_{\text{géom}}(Z''_{1,z_1}/z_1) & \rightrightarrows & C(Z''_{0,z_1}/z_1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ C_{\text{géom}}(Z''_{1,z_2}/z_2) & \rightrightarrows & C_{\text{géom}}(Z''_{1,z_2}/z_2) \end{array}$$

□

Supposons maintenant que  $Z'' \rightarrow Z$  soit propre, que  $Z$  soit log régulier et que  $\bar{z}_1$  et  $\bar{z}_2$  soient dans la même strate de  $Z$  (c'est-à-dire que le morphisme de cospécialisation  $M_{Z,z_1} \rightarrow M_{Z,z_2}$  est un isomorphisme). On peut remplacer  $Z$  par son localisé strict en  $z_1$  (ceci n'affecte pas notre morphisme de cospécialisation). En particulier  $Z$  est log Zariski. Quitte à prendre encore un voisinage két, on peut supposer que  $Z'' \rightarrow Z$  est saturé.

Le fait que  $z_1$  et  $z_2$  soient dans la même strate de  $Z$  implique que  $C_{\text{géom}}(Z''_{z_1}) \rightarrow C_{\text{géom}}(Z''_{z_2})$  envoie les polysimplexes non dégénérés vers les polysimplexes non dégénérés (il suffit de regarder localement pour la topologie étale).

Soit  $Z''^{(i)}$  l'adhérence de  $(Z''_{z_2})^{(i)}$  dans  $Z''$  muni de la structure de sous-schéma réduit, et soit  $(\tilde{Z}'')^{(i)}$  sa normalisation. En regardant localement pour la topologie étale sur  $Z''$ , et grâce au fait que  $z_2$  et  $z_1$  sont dans la même strate, on voit que  $(Z''^{(i)})_{z_1}$  est juste  $(Z''_{z_1})^{(i)}$  et que  $((\tilde{Z}'')^{(i)})_{z_1}$  est juste la normalisation de  $(Z''_{z_1})^{(i)}$ . Ainsi les composantes connexes de  $((\tilde{Z}'')^{(i)})_{z_1}$  et de  $((\tilde{Z}'')^{(i)})_{z_2}$  sont en bijection avec les strates de  $Z''_{z_1}$  et de  $Z''_{z_2}$  de rang  $i$ . Comme expliqué précédemment, puisque  $Z'' \rightarrow Z$  est saturé,  $(\tilde{Z}'')^{(i)}$  est séparable sur la clôture de  $z_2$  et donc la factorisation de Stein de  $(\tilde{Z}'')^{(i)}$  pour tout  $i$  nous dit que  $\text{Str}(Z_{\bar{z}_1}) \rightarrow \text{Str}(Z_{\bar{z}_2})$  est bijectif.

Si l'on suppose de plus que  $C_{\text{géom}}(Z''_{z_2}/z_2)$  est intérieurement libre (c'est le cas si  $C_{\text{géom}}(Z'_{z_2}/z_2)$  est intérieurement libre),

$$C_{\text{géom}}(Z''_{z_1}/z_1) \rightarrow C_{\text{géom}}(Z''_{z_2}/z_2)$$

est aussi un isomorphisme.

Supposons  $Z'' \rightarrow Z$  propre,  $Z$  log régulier, et supposons que pour toute strate de  $Z$  de point générique log géométrique  $\bar{z}$ ,  $C_{\text{géom}}(Z'_z)$  est intérieurement libre.

Soit  $z_2 \rightarrow z_1$  une spécialisation de points log géométriques  $Z$ . Soit  $x \rightarrow z_2$  une spécialisation où  $x$  est un point log géométrique au-dessus du point générique de la strate de  $z_2$  (il existe une telle spécialisation). Rappelons que  $(x \rightarrow z_2)$  et  $(x \rightarrow z_1)$  sont alors de bons couples (cf. [26, prop. 7.2]). On a alors les morphismes :

$$C_{\text{géom}}(Z_{z_2}) \xleftarrow{\sim} C_{\text{géom}}(Z_x) \rightarrow C_{\text{géom}}(Z_{z_1}).$$

On obtient donc un morphisme  $C_{\text{géom}}(Z_{z_2}) \rightarrow C_{\text{géom}}(Z_{z_1})$  qui ne dépend pas de  $x \rightarrow z_2$  (puisque tout autre morphisme  $x \rightarrow z_2$  se factorise à travers notre spécialisation précédente).

De plus, si  $z_1$  et  $z_2$  sont dans la même strate, le morphisme de cospécialisation est un isomorphisme.

### 6.3.2 Morphisme de cospécialisation du groupe fondamental $(p')$ -tempéré

Sous les mêmes hypothèses que précédemment, soit  $\bar{y}_2 \rightarrow \bar{y}_1$  une spécialisation de points log géométriques sur des log points fs  $y_2 \rightarrow y_1$  de  $Z'$  dont les images  $z_2 \rightarrow z_1$  dans  $Z$  se trouvent dans la même strate de  $Z$ . On a alors un foncteur de cospécialisation  $F : \text{KCov}_{\text{géom}}(Z'_{z_1}/z_1)^{\mathbb{L}} \rightarrow \text{KCov}_{\text{géom}}(Z'_{z_2}/z_2)^{\mathbb{L}}$  si  $\mathbb{L}$  ne contient pas la caractéristique résiduelle  $p$  en  $z_1$ . Si  $Z''_{z_1}$  est un revêtement két géométrique de  $Z'_{z_1}$ , il s'étend grâce au corollaire 6.1.4 à un voisinage két  $U$  de  $\bar{z}_1$  dans  $Z$ . Soit  $Z''_U \rightarrow U$  cette extension (unique quitte à remplacer  $U$  par un voisinage plus petit de  $\bar{z}_1$ ), et  $F(Z''_{z_1})$  est juste la fibre de  $Z'_0 \rightarrow Z'$  dans  $\bar{z}_2$   $Z''_U$ . On a alors un isomorphisme  $C_{\text{géom}}(Z''_1) \simeq C_{\text{géom}}(Z''_2)$ , qui induit un foncteur de catégories fibrées :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_{\text{top-géom}}(Z'_1) & \rightarrow & \mathcal{D}_{\text{top-géom}}(Z'_2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{KCov}_{\text{géom}}(Z'_{z_1}/z_1)^{\mathbb{L}} & \rightarrow & \text{KCov}_{\text{géom}}(Z'_{z_2}/z_2)^{\mathbb{L}} \end{array}$$

et donc un morphisme de spécialisation  $\pi_1^{\text{temp-geom}}(Z'_{z_2}, y_2)^{\mathbb{L}} \rightarrow \pi_1^{\text{temp-geom}}(Z'_{z_1}, y_1)^{\mathbb{L}}$ .

Soit maintenant  $K$  un corps complet pour une valuation discrète.  $\text{Spec } O_K$  est muni de sa log-structure usuelle. Soit  $\mathbb{L}$  un ensemble de nombres premiers ne contenant pas la caractéristique résiduelle  $p$  de  $K$  ( $p$  peut être nul).

Soit  $X \rightarrow Y$  une log fibration polystable propre telle que  $Y \rightarrow \text{Spec } O_K$  soit log lisse, et supposons que pour tout point géométrique  $\bar{y}$  de  $Y_s$ ,  $C(X_{\bar{y}})$  est *intérieurement libre* (c'est par exemple le cas si  $X \rightarrow Y$  est strictement polystable ou si les fibres de  $X \rightarrow Y$  sont des courbes semistables, au sens de la définition 6.2.1). Rappelons que la fibre générique  $\mathfrak{Y}_{\eta}$  du complété formel de  $Y$  le long de sa fibre spéciale s'identifie à un sous-domaine analytique de  $Y^{\text{an}}$  (de plus  $\mathfrak{Y}_{\eta} \rightarrow Y^{\text{an}}$  est un isomorphisme si  $Y$  est supposé propre).

Soient  $y_1$  et  $y_2$  deux points de  $Y_{\text{tr}}^{\text{an}} \cap \mathfrak{Y}_{\eta}$  à valeur dans un corps à valuation discrète (quitte à remplacer  $\mathcal{H}(y_1)$  par une extension isométrique, ce qui ne change pas le groupe fondamental tempéré géométrique, on supposera que  $\mathcal{H}(y_1)$  a un

corps résiduel algébriquement clos). On a des morphismes canoniques de log schémas fs  $\text{Spec } O_{\mathcal{H}(y_i)} \rightarrow Y$  pour  $i = 1, 2$ . Soit  $s_i$  le log point fs de  $Y$  correspondant au point spécial de  $\text{Spec } O_{\mathcal{H}(y_i)}$  muni de la log structure image inverse. Soit  $s'_i$  le log point fs de  $Y$  qui a même schéma sous-jacent que  $s_i$  mais muni de la log structure image inverse.

Un point géométrique  $\bar{y}_i$  (de l'espace de Berkovich  $\mathfrak{Y}_\eta$ ) au dessus de  $y_i$  induit un point log géométrique  $\bar{s}_i$  au-dessus de  $s_i$  ( $\bar{y}_i$  peut aussi être vu comme un point log géométrique de  $Y$  puisque la log structure de  $Y$  est triviale en  $y_i$ ). Soit  $\bar{s}'_i$  un point log géométrique de  $s'_i \times_{s_i} \bar{s}_i$ .

Considérons une spécialisation két  $\bar{s}'_2 \rightarrow \bar{s}'_1$  (il en existe dès qu'il existe une spécialisation entre les points géométriques sous-jacents de  $\hat{Y}$ ).

Plus précisément, définissons la catégorie  $\text{Pt}^{\text{an}}(Y)$  dont les objets sont les points géométriques  $\bar{y}$  de  $Y_{\text{tr}}^{\text{an}} \cap \mathfrak{Y}_\eta$  tels que  $\mathcal{H}(y)$  est à valuation discrète (où  $y$  est le point sous-jacent à  $\bar{y}$ ) et  $\text{Hom}(\bar{y}, \bar{y}')$  est l'ensemble des spécialisations két de  $\bar{s}$  vers  $\bar{s}'$  où  $\bar{s}$  et  $\bar{s}'$  sont les log-réductions de  $\bar{y}$  et  $\bar{y}'$ .

Définissons aussi la catégorie  $\text{Pt}_0^{\text{an}}(Y)$  obtenu à partir de  $\text{Pt}^{\text{an}}(Y)$  en inversant les morphismes  $\bar{y} \rightarrow \bar{y}'$  tels que  $\bar{s}$  et  $\bar{s}'$  soient dans la même strate  $Y$ .

**Théorème 6.3.5.** *Soit  $X \rightarrow Y$  une log fibration polystable propre et  $Y \rightarrow \text{Spec } O_K$  un morphisme log lisse. Supposons que, pour tout point géométrique  $\bar{y}$  de  $Y_s$ ,  $C(X_{\bar{y}})$  est intérieurement libre. Alors, pour tout morphisme  $\bar{y}_2 \rightarrow \bar{y}_1$  dans  $\text{Pt}^{\text{an}}(Y)$ , il existe un morphisme extérieur*

$$\pi_1^{\text{temp}}(X_{\bar{y}_1}^{\text{an}})^{\mathbb{L}} \rightarrow \pi_1^{\text{temp}}(X_{\bar{y}_2}^{\text{an}})^{\mathbb{L}},$$

qui est un isomorphisme si  $s_1$  et  $s_2$  sont dans la même strate de  $Y$ .

*Démonstration.* On a un foncteur de cospécialisation

$$F : \text{KCov}_{\text{géo}}(X_{s_1}/s_1)^{\mathbb{L}} \rightarrow \text{KCov}_{\text{géo}}(X_{s_2}/s_2)^{\mathbb{L}}$$

qui se factorise à travers  $\text{KCov}_{\text{géo}}(X_{Z_0}/Z_0)^{\mathbb{L}}$  où  $Z_0$  est le localisé strict en  $s_1$ . Soit  $\eta$  un point générique au-dessus du point générique de  $Y$ .

Comme les foncteurs de cospécialisation  $\text{KCov}_{\text{géo}}(X_{s_i}/s_i)^{\mathbb{L}} \rightarrow \text{KCov}_{\text{géo}}(X_{y_i}/y_i)^{\mathbb{L}}$  et  $\text{KCov}_{\text{géo}}(X_{y_i}/y_i)^{\mathbb{L}} \rightarrow \text{KCov}_{\text{géo}}(X_\eta/\eta)^{\mathbb{L}}$  sont des équivalences ([27, prop. 1.15]), on obtient que  $\text{KCov}_{\text{géo}}(X_{s_1}/s_1)^{\mathbb{L}} \rightarrow \text{KCov}_{\text{géo}}(X_{s_2}/s_2)^{\mathbb{L}}$  est une équivalence.

Si  $Z_{s_1}$  est un revêtement két de  $X_{s_1}$ , il s'étend grâce au corollaire 6.1.4 à un voisinage két  $U$  de  $\bar{s}_1$  dans  $Z$ . Soit  $Z_U \rightarrow U$  cette extension (unique quitte à remplacer  $U$  par un voisinage két plus petit de  $\bar{s}_1$ ), et  $F(Z_{s_1})$  est juste la fibre en  $\bar{z}_2$  de  $Z_U$ . On a alors un morphisme de cospécialisation  $C_{\text{géo}}(Z_{s_1}) \rightarrow C_{\text{géo}}(Z_{s_2})$ , qui induit un foncteur de spécialisation

$$(\mathcal{D}_{\text{top-géo}})_{X_{s_2}}(Z_{s_2}) \rightarrow (\mathcal{D}_{\text{top-géo}})_{X_{s_1}}(Z_{s_1}),$$

qui est une équivalence de catégories si  $\bar{s}_1$  et  $\bar{s}_2$  sont dans la même strate de  $Y$  ( $(\mathcal{D}_{\text{top-géo}})_{X_{s_i}}$  est la catégorie fibrée sur  $\text{KCov}_{\text{géo}}(X_{s_i})^{\mathbb{L}}$  des revêtements topologiques).

On a donc un diagramme 2-commutatif :

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{D}_{\text{top-géom}})_{X_{s_2}} & \rightarrow & (\mathcal{D}_{\text{top-géom}})_{X_{s_1}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{KCov}_{\text{géom}}(X_{s_2}/s_2)^{\mathbb{L}} & \xrightarrow{F^{-1}} & \text{KCov}_{\text{géom}}(X_{s_1}/s_1)^{\mathbb{L}} \end{array}$$

où  $F^{-1}$  est un quasi-inverse de  $F$ . Cela induit un morphisme de cospécialisation :

$$\pi_1^{\text{temp-geom}}(X_{s_1}/s_1)^{\mathbb{L}} \rightarrow \pi_1^{\text{temp-geom}}(X_{s_2}/s_2)^{\mathbb{L}}$$

Les morphismes de comparaison du théorème 5.2.3 nous donnent le morphisme voulu.  $\square$

On obtient donc un foncteur  $\text{Pt}_0^{\text{an}}(Y)^{\text{op}} \rightarrow \text{OutGp}_{\text{top}}$  (où  $\text{OutGp}_{\text{top}}$  est la catégorie des groupes topologiques à automorphisme intérieur près) qui envoie  $\bar{y}$  vers  $\pi_1^{\text{temp}}(X_{\bar{y}}^{\text{an}})^{\mathbb{L}}$ .

*Remarque.* Un tel foncteur ne peut pas exister si  $p \neq 0$  et  $\mathbb{L}$  est l'ensemble de tous les nombres premiers. En effet, si  $X_1$  et  $X_2$  sont deux courbes de Mumford avec réduction isomorphe mais une métrique différente sur le graphe de leur modèle stable, alors leurs groupes fondamentaux tempérés sont non isomorphes. Considérons un espace de module de courbes stables avec structure de niveau muni de sa log structure canonique sur  $\text{Spec } \mathbf{Z}_p$  (lui même muni de sa log structure induite par  $\mathbf{Z}_p^* \rightarrow \mathbf{Z}_p$ ) et un point géométrique  $\bar{s}$  dans la fibre spéciale de l'espace de modules correspondant à une courbe stable totalement dégénérée. En particulier, elle a au moins un point double, et donc le rang de  $\bar{M}_{\bar{s}}^{\text{gp}}$  est au moins deux (rappelons que  $\bar{M}_{\bar{s}} = \mathbf{N}[p] \oplus \bigoplus_{e \in \mathcal{E}} \mathbf{N}m_e$  où  $\mathcal{E}$  est l'ensemble des arêtes du graphe dual de la courbe correspondant à  $\bar{s}$ ). Prenons deux log points (de corps sous jacent séparablement clos) fs  $s_1$  et  $s_2$  valuatifs (c'est-à-dire  $\bar{M}_{s_i} \simeq \mathbf{N}$ ) tels que les morphismes correspondants  $\bar{M}_{\bar{s}} \rightarrow \mathbf{N}$  soient linéairement indépendants. Il existe une unique normalisation  $M_{s_i} \rightarrow \mathbf{Q}$  tel que l'image de  $|p|$  par la composée  $\bar{M}_{\mathbf{Z}_p, \bar{\mathbf{F}}_p} \rightarrow \bar{M}_{s_i} \rightarrow \mathbf{Q}$  soit 1. Soient  $\eta_1$  et  $\eta_2$  des points discrètement valués de la fibre géométrique analytique dont les log-réductions sont  $s_1$  et  $s_2$ . Alors les deux courbes de Mumford géométriques correspondantes  $C_i$  ont des métriques différentes sur le graphe de leur modèle stable (car la longueur d'une arête  $e$  pour la distance de  $C_i$  est égale à l'image de  $m_e \in \bar{M}_{\bar{s}}$  par la composée  $\bar{M}_{\bar{s}} \rightarrow \bar{M}_{s_i} \rightarrow \mathbf{Q}$ ), et donc ont des groupes fondamentaux tempérés différents d'après le théorème 3.4.6. Mais deux log points géométriques au dessus de  $s_1$  et  $s_2$  sont isomorphes vis-à-vis de la spécialisation pour la topologie két.

Si l'on enlève l'hypothèse de liberté intérieure, on obtient quand même le résultat suivant, avec la même preuve :

**Théorème 6.3.6.** *Pour tout couple de points géométriques  $\bar{y}_1$  et  $\bar{y}_2$  de  $Y_{\text{tr}}^{\text{an}} \cap \mathfrak{Y}_{\eta}$  au-dessus de points à valuation discrète  $y_1, y_2$  de  $Y$ . Soit  $\bar{s}_1, \bar{s}_2$  leurs log réductions et supposons que  $\bar{s}_1$  est le point générique d'une strate de  $Y$ . Alors il existe un homomorphisme extérieur de cospécialisation, fonctoriel :*

$$\pi_1^{\text{temp}}(X_{\bar{y}_1}^{\text{an}})^{\mathbb{L}} \rightarrow \pi_1^{\text{temp}}(X_{\bar{y}_2}^{\text{an}})^{\mathbb{L}}.$$

La preuve est similaire à celle du théorème 6.3.5, si ce n'est que le foncteur

$$(\mathcal{D}_{\text{top-géom}})_{X_{s_2}}(Z_{s_2}) \rightarrow (\mathcal{D}_{\text{top-géom}})_{X_{s_1}}(Z_{s_1})$$

n'a était défini que pour  $\bar{s}_1$  point générique d'une strate (cf. proposition 6.3.4)

# Bibliographie

- [1] Yves André, *On a geometric description of  $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$  and a  $p$ -adic avatar of  $\widehat{GT}$* , Duke Mathematical Journal **119** (2003), 1–39.
- [2] ———, *Period mappings and differential equations : From  $\mathbf{C}$  to  $\mathbf{C}_p$* , MSJ Memoirs, vol. 12, Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2003.
- [3] G. V. Belyi, *Galois extensions of a maximal cyclotomic field*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **43** (1979), no. 2, 267–276.
- [4] Vladimir G. Berkovich, *Spectral theory and analytic geometry over non-archimedean fields*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 33, American Mathematical Society, Providence, 1990.
- [5] ———, *étale cohomology for non-archimedean analytic spaces*, Publications mathématiques de l’IHES **78** (1993), 5–161.
- [6] ———, *Vanishing cycles for formal schemes*, Inventiones Mathematicae **115** (1994), no. 3, 539–571.
- [7] ———, *Smooth  $p$ -adic analytic spaces are locally contractible*, Inventiones Mathematicae **137** (1999), 1–84.
- [8] ———, *Smooth  $p$ -adic analytic spaces are locally contractible. II*, Geometric aspects of Dwork theory, Walter de Gruyter & co, 2004, pp. 293–370.
- [9] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Topologie générale. Chapitres 1 à 4*, Hermann, Paris, 1971.
- [10] Patrick Eric Bradley, *Riemann existence theorems of mumford type*, Mathematische Zeitschrift **251** (2005), no. 2, 393–414.
- [11] Aise Johan de Jong, *étale fundametal group of non archimedean analytic spaces*, Compositio mathematica **97** (1995), 89–118.
- [12] Pierre Deligne and David Mumford, *The irreducibility of the space of curves of given genus*, Publications mathématiques de l’IHES (1969), no. 36, 75–109.
- [13] Jean Fresnel and Marius van der Put, *Géométrie analytique rigide et applications*, Progress in Mathematics, vol. 18, Birkhäuser, 1981.
- [14] ———, *uniformisation des variétés abéliennes*, annales de la faculté des sciences de Toulouse 5e série **S10** (1989), 7–42.
- [15] Jean Giraud, *Méthode de la descente*, Bulletins de la Société Mathématiques de France **2** (1964), 1–150.
- [16] Jean Giraud, *cohomologie non abélienne*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 179, Springer-Verlag, 1971.

- [17] Alexander Grothendieck (ed.), *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA1)*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 224, Berlin, Springer, 1971.
- [18] Alexander Grothendieck (ed.), *Groupes de monodromie en géométrie algébrique (SGA7-1)*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 288, Berlin, Springer, 1972.
- [19] Alexander Grothendieck and Jean Dieudonné, *Eléments de géométrie algébrique IV : Etude locale des schémas et des morphismes de schémas (Quatrième partie)*, Publications mathématiques de l’IHES **31** (1967), 5–361.
- [20] André Haefliger, *Extension of complexes of groups*, Annales de l’Institut Fourier **42** (1992), no. 1-2, 275–311.
- [21] Luc Illusie, *An overview of the works of K. Fujiwara, K. Kato, and C. Nakayama on logarithmic étale cohomology*, Cohomologies  $p$ -adiques et applications arithmétiques (II), Astérisque, vol. 279, Société mathématique de France, 2002, pp. 271–322.
- [22] Luc Illusie, Kazuya Kato, and Chikara Nakayama, *Quasi-unipotent logarithmic riemann-hilbert correspondences*, Journal of Mathematical Sciences of the University of Tokyo **12** (2005), 1–66.
- [23] Peter Johnstone, *Sketches of an elephant : A topos theory compendium*, Oxford logic guides, vol. 44, Oxford science publications, 2002.
- [24] Fumiharu Kato,  *$p$ -adic schwarzian triangle groups of mumford type*, arxiv :9908174.
- [25] Kazuya Kato, *Logarithmic structures of Fontaine-Illusie*, Algebraic analysis, Geometry and Number theory, Proceedings of the JAMI inaugural conference (Baltimore and London), The John Hopkins University Press, 1989, pp. 191–224.
- [26] ———, *Toric singularities*, American Journal of Mathematics **116** (1994), no. 5, 1073–1099.
- [27] Mark Kisin, *Prime to  $p$  fundamental groups and tame Galois action*, Annales de l’Institut Fourier **50** (2000), no. 4, 1099–1126.
- [28] Olivier Leroy, *Groupe fondamentale et théorème de van kampen en théorie des topos*, Cahiers mathématiques, Montpellier, vol. 17, université des sciences et techniques du Languedoc, 1979.
- [29] J. S. Milne, *Jacobian varieties*, Arithmetic Geometry (Proc. Conference on Arithmetic Geometry, Storrs, August 1984), Springer, 1986, pp. 167–212.
- [30] Shinichi Mochizuki, *Topics in anabelian geometry II : Decomposition groups and endomorphisms*, non publié.
- [31] ———, *The local pro- $p$  anabelian geometry of curves*, Inventiones Mathematicae **138** (1999), 319–423.
- [32] ———, *The absolute anabelian geometry of hyperbolic curves*, Galois theory and modular forms, Kluwer Academic publishers, 2003, pp. 77–122.
- [33] ———, *Semi-graphs of anabelioids*, Publications of the Research Institute of Mathematical Sciences **42** (2006), no. 1, 221–322.
- [34] Wiesława Nizioł, *Toric singularities : log-blow-ups and global resolutions*, Journal of algebraic geometry **15** (2006), no. 1, 1–29.
- [35] Arthur Ogus, *Lectures on logarithmic algebraic geometry*, notes préliminaires, [http://math.berkeley.edu/~ogus/preprints/log\\_book/logbook.pdf](http://math.berkeley.edu/~ogus/preprints/log_book/logbook.pdf).

- [36] Fabrice Orgogozo, *Erratum et compléments à l'article « Altérations et groupe fondamental premier à  $p$  » paru au bulletin de la s.m.f. (131), tome 1, 2003*, non publié.
- [37] ———, *Altérations et groupe fondamental premier à  $p$* , Bulletin de la société mathématique de France **131** (2003), no. 1, 123–147.
- [38] Jakob Stix, *Projective anabelian curves in positive characteristic and descent theory for log-étale covers*, Ph.D. thesis, Universität Bonn Mathematisches Institut, Bonn, 2002.
- [39] Amaury Thuillier, *Théorie du potentiel sur les courbes en géométrie analytique non archimédienne. applications à la théorie d'araki-kato*, Ph.D. thesis, Institut de recherche mathématiques de Rennes, 2005.
- [40] Takeshi Tsuji, *Saturated morphisms of logarithmic schemes*, 1997, non publié.
- [41] Marius van der Put, *Étale coverings of a Mumford curve*, Annales de l'Institut Fourier **33** (1983), no. 1, 29–52.
- [42] Marius van der Put, *Les fonctions thêta d'une courbe de Mumford.*, Groupe de travail d'Analyse Ultramétrique, 9e Année : 1981/82, No.1, Exposé No.10, 1983.
- [43] Isabelle Vidal, *Morphismes log étales et descente par homéomorphismes universels*, Compte rendu de l'Académie des sciences **332** (2001), no. 1, 239–244.